doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0001.005

关于不定方程 $x^2+4^n=y^{11}$

唐维彬

(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘　要:利用代数数论的方法,证明了不定方程 $x^2+4^n=y^{11}$,当 $n=3$ 和 $n=4$ 时无整数解,$n=5$ 时有整数解$(x,y)=(\pm32,2)$.

关键词:不定方程;整数解;代数数论

中图分类号:O156　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)01-0015-04

设 $A,B\in\mathbf{Z}^+$,A 无平方因子,关于不定方程

$$Ax^2+B=y^n,x,y\in\mathbf{Z}^+,n\in\mathbf{Z},x\equiv1(\bmod 2),n>1 \tag{1}$$

的解的讨论是代数数论中的一类重要课题.当 $A=1,B=1$ 时,LEDESGUE 证明了式(1)无整数解;NAGELL 证明了当 $A=2,B=1,n=5$ 时,式(1)仅有整数解$(x,y)=(\pm11,3)$;对于 $A=1,B=4^3$ 或 4^4,$n=5,7$ 时的情况文献[1-7]均已讨论过;李中恢,张四保[8]证明了关于不定方程 $x^2+16=y^{11}$ 无整数解;而对于 $A=1,n=11,B=4^3$,4^4 或 4^5 时的情况未曾讨论.因此,此处讨论了当 $A=1,n=11,B=4^3$,4^4 或 4^5 时的情况.

引理 1　设 M 是唯一分解整环,正整数 $k\geqslant2$,以及 $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$,$(\alpha,\beta)=1$,那么若 $\alpha\beta=\gamma^k,\gamma\in M$,则有 $\alpha=\varepsilon_1\mu^k,\beta=\varepsilon_2\nu^k,\mu,\nu\in M$,其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是 M 中的单位元素,并且 $\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon^k$,$\varepsilon$ 为单位元素.

定理 1　不定方程

$$x^2+4^3=y^{11} \tag{2}$$

无整数解.

证明　这里分 $x\equiv1(\bmod 2)$,$x\equiv0(\bmod 2)$两种情况进行讨论.

1) 先假设 $x\equiv1(\bmod 2)$,在 $Z[\mathrm{i}]$中,方程(2)可以写为

$$(x+2^3\mathrm{i})(x-2^3\mathrm{i})=y^{11},x,y\in\mathbf{Z}$$

设 $\delta=(x+2^3\mathrm{i},x-2^3\mathrm{i})$,由 $\delta\mid(2x,2^4\mathrm{i})=2$,知道 δ 只能是 $1,1+\mathrm{i},2$.由 $x\equiv1(\bmod 2)$知道,$x+2^3\mathrm{i}\equiv1(\bmod 2)$,所以 $\delta\neq2$;如果 $\delta=1+\mathrm{i}$,则 $N(1+\mathrm{i})\mid N(x+2^3\mathrm{i})$,可知 $2\mid x^2+4^3$,这与 $x\equiv1(\bmod 2)$矛盾,所以 $\delta=1$.由此知 $x+2^3\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})^{11}$,$x,a,b\in\mathbf{Z}$,因而有

$$x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^8-11ab^{10} \tag{3}$$

$$2^3=b(11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}) \tag{4}$$

从式(4)中可以得到 $b=\pm1,\pm2^t(1\leqslant t\leqslant2),\pm2^3$.

当 $b=\pm1$ 时,$1\pm2^3=11(a^{10}-15a^8+42a^6-30a^4+5a^2)$,等式两边同时取模 11,得到 $9\equiv0(\bmod 11)$或者 $4\equiv0(\bmod 11)$,这是矛盾的.

当 $b=\pm2^t(1\leqslant t\leqslant2)$,$\pm2^{3-t}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}$,两边同时取模 2,得到 $0\equiv a^{10}(\bmod 2)$,从而 a 必为偶数,然后再由 $x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^6-11ab^6$ 知 x 也为

收稿日期:2014-06-09;**修回日期**:2014-07-09.

作者简介:唐维彬(1990-),男,重庆南岸人,硕士研究生,从事计算数论研究.

偶数,这与假设 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$矛盾.

当 $b=2^3$ 时,$1+2^{30}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8$,等式两边同取模 11 得 $2\equiv0(\mathrm{mod}\ 11)$,这是不可能的.

当 $b=-2^3$ 时, $a^2(11a^8-165a^6b^2+462a^4b^4-330a^2b^6+55b^8)=2^{30}-1=3^2\times7\times11\times31\times151\times331$,因为 $a\in\mathbf{Z}$,所以 $a^2=1$ 或 9,代入验证如下:

当 $a^2=1$ 时,$b=-2^3$, $11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}=-235\ 620\ 661\neq-1$.

当 $a^2=9$ 时,$b=-2^3$, $11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}=1\ 534\ 760\ 963\neq-1$.

综上所述,当 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$时,原方程无整数解.

2) 再讨论 $x\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$的情况,也就是 x 为偶数,容易知道 y 也是偶数,所以令 $x=2x_1$, $y=2y_1$, x_1, $y_1\in\mathbf{Z}$.此时方程变为

$$(2x_1)^2+4^3=(2y_1)^{11}$$

即 $x_1^2+4^2=2^9y_1^{11}(x_1,y_1\in\mathbf{Z})$,易知 x_1 仍为偶数,令 $x_1=2x_2$,得 $x_2^2+4=2^7y_1^{11}$,此时 x_2 也为偶数,再令 $x_2=2x_3$,得 $x_3^2+1=2^5y_1^{11}$,由于 $2^5y_1^{11}$是偶数,所以 x_3 必为奇数,故等式两边同时取模 8,得到

$$x_3^2\equiv-1\equiv7(\mathrm{mod}\ 8)$$

由数论的知识可以知道,7 是模 8 的二次非剩余,也即 $x_3^2\equiv-1\equiv7(\mathrm{mod}\ 8)$无解,所以当 $x\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$时式(2)无整数解.

定理 2 不定方程

$$x^2+4^4=y^{11} \tag{5}$$

无整数解.

证明 这里分 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$, $x\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$两种情况进行讨论.

1) 先假设 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,在 $Z[\mathrm{i}]$中原方程可以写为

$$(x+2^4\mathrm{i})(x-2^4\mathrm{i})=y^{11},x,y\in\mathbf{Z}$$

设 $\delta=(x+2^4\mathrm{i},x-2^4\mathrm{i})$,由 $\delta\mid(2x,2^5\mathrm{i})=2$,知道 δ 只能是 $1,1+\mathrm{i},2$.由 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,知道 $x+2^4\mathrm{i}\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,所以 $\delta\neq2$;如果 $\delta=1+\mathrm{i}$,则 $N(1+\mathrm{i})\mid N(x+2^4\mathrm{i})$,即 $2\mid x^2+4^4$,与 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$产生矛盾,因此 $\delta=1$.由此知 $x+2^4\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})^{11}$, $x,a,b\in\mathbf{Z}$,因而有

$$x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^8-11ab^{10} \tag{6}$$

$$2^4=b(11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}) \tag{7}$$

因此 $b=\pm1,\pm2^t(1\leqslant t\leqslant3),\pm2^4$.

当 $b=\pm1$ 时,$1\pm2^4=11(a^{10}-15a^8+42a^6-30a^4+5a^2)$,此式要成立需满足 $11\mid1\pm2^4$,但这是不可能的.

当 $b=\pm2^t(1\leqslant t\leqslant3)$时,$\pm2^{4-t}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}$,则 a 必为偶数,再由 $x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^6-11ab^6$ 知 x 也为偶数,这与假设 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$矛盾.

当 $b=2^4$ 时,$1+2^{40}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8$,等式两边同取模 11 得 $2\equiv0(\mathrm{mod}\ 11)$,这是不可能的.

当 $b=-2^4$ 时, $11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8=2^{40}-1=3\times5^2\times11\times17\times31\times41\times61\ 681$, 由于 $a\in\mathbf{Z}$,所以 $a^2=1$ 或 25.下面讨论两种情况得到:

当 $a^2=1$ 时,$b=-2^4$ 时, $11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}=-868\ 794\ 672\ 373\neq-1$.

当 $a^2=25$ 时,$b=-2^4$, $11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}=1\ 802\ 463\ 026\ 099\neq-1$.

综上所述,当 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$时,原方程无整数解.

2) 再讨论 $x\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$的情况.易知 y 也是偶数,令 $x=2x_1$, $y=2y_1$, x_1, $y_1\in\mathbf{Z}$.此时方程可变为$(2x_1)^2+4^4=(2y_1)^{11}$,即 $x_1^2+4^3=2^9y_1^{11}(x_1,y_1\in\mathbf{Z})$,易知 x_1 仍为偶数,令 $x_1=2x_2$,得 $x_2^2+4^2=2^7y_1^7$,此时 x_2 也为偶数,再令 $x_2=2x_3$, $x_3\in\mathbf{Z}$,得 $x_3^2+4=2^5y_2^7$,仍有 x_3 为偶数,令 $x_3=2x_4$,得 $x_4^2+1=8y_1^7$,由于 x_4 是奇数,取 mod 8.可知该方程无整数解,故当 $x\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$时,不定方程 $x^2+4^4=y^{11}$无整数解.

综上讨论，不定方程 $x^2+4^4=y^{11}$ 无整数解.

定理 3　不定方程

$$x^2+4^5=y^{11} \tag{8}$$

有整数解 $(x=\pm 32, y=2)$.

证明　这里分 $x\equiv 1(\bmod 2)$，$x\equiv 0(\bmod 2)$ 两种情况进行讨论.

1) 先假设 $x\equiv 1(\bmod 2)$，在 $Z[\mathrm{i}]$ 中原方程可以写为

$$(x+2^5\mathrm{i})(x-2^5\mathrm{i})=y^{11}, x, y\in \mathbf{Z}$$

设 $\delta=(x+2^5\mathrm{i}, x-2^5\mathrm{i})$，由 $\delta|(2x, 2^6\mathrm{i})=2$，知道 δ 只能是 $1, 1+\mathrm{i}, 2$. 因 $x\equiv 1(\bmod 2)$ 知道 $x+2^5\mathrm{i}\equiv 1(\bmod 2)$，所以 $\delta\neq 2$；如果 $\delta=1+\mathrm{i}$，则 $N(1+\mathrm{i})|N(x+2^5\mathrm{i})$，即 $2|x^2+4^5$，与 $x\equiv 1(\bmod 2)$ 产生矛盾，因此 $\delta=1$. 由此知 $x+2^5\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})^{11}$，$x, a, b\in\mathbf{Z}$，因而有

$$x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^8-11ab^{10} \tag{9}$$

$$2^5=b(11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}) \tag{10}$$

因此 $b=\pm 1, \pm 2^t(1\leqslant t\leqslant 4), \pm 2^5$.

当 $b=-1$ 时，$1-2^4=11(a^{10}-15a^8+42a^6-30a^4+5a^2)$，此式要成立需满足 $11|1-2^5$，但这是不可能的.

当 $b=1$ 时，$1+2^5=33=11(a^{10}-15a^8+42a^6-30a^4+5a^2)$，得到 $a^2=1$，但 $x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^6-11ab^6$，此时 x 为偶数，与假设矛盾，这是不可能的.

当 $b=\pm 2^t(1\leqslant t\leqslant 4)$ 时，$\pm 2^{5-t}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}$，则 a 必为偶数，再由 $x=a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^6-11ab^6$ 知 x 也为偶数，这与假设 $x\equiv 1(\bmod 2)$ 矛盾.

当 $b=2^5$ 时，$1+2^{50}=11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8$，等式两边同取模 11 得 $2\equiv 0(\bmod 11)$，这是不可能的.

当 $b=-2^5$ 时，$11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8=2^{50}-1=3\times 11\times 31\times 251\times 601\times 1\,801\times 4\,051$，由于 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a^2=1$. 当 $a^2=1$ 时，$b=-2^5$ 时，$11a^{10}-165a^8b^2+462a^6b^4-330a^4b^6+55a^2b^8-b^{10}=-1\,065\,780\,617\,843\,701\neq -1$.

综上所述，当 $x\equiv 1(\bmod 2)$ 时，原方程无整数解.

2) 再讨论 $x\equiv 0(\bmod 2)$ 的情况，也就是 x 为偶数，容易知道 y 也是偶数，所以令 $x=2x_1$，$y=2y_1$，$x_1, y_1\in\mathbf{Z}$. 此时方程变为

$$(2x_1)^2+4^5=(2y_1)^{11}$$

即 $x_1^2+4^4=2^9y_1^{11}(x_1, y_1\in\mathbf{Z})$，易知 x_1 仍为偶数，且能被 4 整除，令 $x_1=4x_2$，得 $x_2^2+4^2=2^5y_1^{11}$，此时 x_2 也为偶数，且能被 4 整除，再令 $x_2=4x_3$，得 $x_3^2+1=2y_1^{11}$，由于 $2y_1^{11}$ 是偶数，所以 x_3 必为奇数. 只需讨论 $x^2+1=2y_1^{11}$ 的整数解. 在 $Z[\mathrm{i}]$ 中此方程可以写为

$$(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^2y^{11}$$

记 $\mu=(x+\mathrm{i}, x-\mathrm{i})$，$\mu|(2x, 2\mathrm{i})=2$，所以 μ 的值只能为 $1, 1-\mathrm{i}, 2$. 显然 $\mu\neq 2$，因为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\mathrm{i}\notin Z[\mathrm{i}]$，若 $\mu=1$，则 $\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^2=2$ 一定只能整除 $x+\mathrm{i}, x-\mathrm{i}$ 中的一个，但这是不可能的，故 $\mu=1-\mathrm{i}$. 由此可以得到 $\frac{x+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{x-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=y^{11}$，$(\frac{x+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \frac{x-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}})=1$. 故由引理可得 $x+\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})^{11}x, a, b\in\mathbf{Z}$. 即

$$\begin{aligned}1=&a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^8-11ab^{10}+\\&11a^{10}b-165a^8b^3+462a^6b^5-330a^4b^7+55a^2b^9-b^{11}\\1=&(a-b)(a^{10}+12a^9b-43a^9b-208a^7b^3+122a^6b^4+584a^5b^5+\\&122a^4b^6-208a^3b^7-43a^2b^8+12ab^9+b^{10})\\x=&a^{11}-55a^9b^2+330a^7b^4-462a^5b^6+165a^3b^8-11ab^{10}-\end{aligned}$$

$$(11a^{10}b-165a^8b^3+462a^6b^5-330a^4b^7+55a^2b^9-b^{11})$$

所以 $(a-b)=\pm1$, $a^{10}+12a^9b-43a^9b-208a^7b^3+122a^6b^4+584a^5b^5+122a^4b^6-208a^3b^7-43a^2b^8+12ab^9-b^{10}=\pm1$.

下面分析何种情况成立:

$$a^{10}+12a^9b-43a^9b-208a^7b^3+122a^6b^4+584a^5b^5+122a^4b^6-208a^3b^7-43a^2b^8+12ab^9-b^{10}=$$
$$(a-b)^{10}+(22a^9b-88a^8b^2-88a^7b^3-88a^6b^4+836a^5b^5-88a^4b^6-88a^3b^7-88a^2b^8+22ab^9)=$$
$$1+(22a^9b-88a^8b^2-88a^7b^3-88a^6b^4+836a^5b^5-88a^4b^6-88a^3b^7-88a^2b^8+22ab^9)$$

所以得到

$$(22a^9b-88a^8b^2-88a^7b^3-88a^6b^4+836a^5b^5-88a^4b^6-88a^3b^7-88a^2b^8+22ab^9)=0 \text{ 或 } -2$$

而

$$22a^9b-88a^8b^2-88a^7b^3-88a^6b^4+836a^5b^5-88a^4b^6-88a^3b^7-88a^2b^8+22ab^9=-2$$

无整数解,因为 22 不整除-2.所以此时,$a-b=1$,

$$22a^9b-88a^8b^2-88a^7b^3-88a^6b^4+836a^5b^5-88a^4b^6-88a^3b^7-88a^2b^8+22ab^9=0$$
$$ab(a^8-4a^7b-4a^6b^2-4a^5b^3+38a^4b^4-4a^3b^5-4a^2b^6-4ab^7+b^8)=0$$

$ab=0$ 或者 $a^8-4a^7b-4a^6b^2-4a^5b^3+38a^4b^4-4a^3b^5-4a^2b^6-4ab^7+b^8=0$.如果 $a^8-4a^7b-4a^6b^2-4a^5b^3+38a^4b^4-4a^3b^5-4a^2b^6-4ab^7+b^8=0$,那么

$$(a-b)^8+4a^7b-32a^6b^2+52a^5b^3-32a^4b^4+52a^3b^5-32a^2b^6+4ab^7=0$$

从而 $4a^7b-32a^6b^2+52a^5b^3-32a^4b^4+52a^3b^5-32a^2b^6+4ab^7=-(a-b)^8=-1$,因为 4 不能整除-1,所以无整数解,所以只能 $ab=0$.

因为 $ab=0$ 且 $a-b=1$,故 $a=1$, $b=0$ 或 $a=0$, $b=-1$,故 $x=\pm1$, $y=1$.所以不定方程 $x^2+1=2y^{11}$ 只有整数解 $x=\pm1$, $y=1$,故 $x_3=\pm1$, $y_1=1$,不定方程 $x^2+4^5=y^{11}$ 有整数解 $(x,y)=(\pm32,2)$.

参考文献:

[1] 潘承洞,潘承彪.代数数论[M].济南:山东大学出版社,2003

[2] 高丽,马永刚.关于不定方程 $x^2+4^2=y^7$[J].西南民族大学学报,2008,34(1):27-29

[3] 张杰.关于不定方程 $x^2+4^3=y^7$ 的解[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(3):27-28

[4] 冉银霞.关于不定方程 $x^2+4^4=y^7$[J].延安大学学报:自然科学版,2012,31(4):14-15

[5] 冉银霞.关于不定方程 $x^2+4^6=y^7$[J].高师理科学刊,2013,33(4):25-26

[6] 王振,张慧.关于 Diophantine 方程 $x^2+4^n=y^3$[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(6):220-222

[7] 崔保军.关于不定方程 $x^2+4^n=y^5$[J].湖北民族学院学报:自然科学版,2011,29(1):49-50

[8] 李中恢,张四保.关于不定方程 $x^2+16=y^{11}$[J].海南大学学报:自然科学版,2009,27(3):216-218

On the Diophantine Equation $x^2+4^n=y^{11}$

TANG Wei-bin

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: By using the method of algebraic number theory, the Diophantine equation $x^2+4^n=y^{11}$ has no integer solution when n=3,4, and has integer solution $(x,y)=(\pm32,2)$ when n=5.

Key words: the Diophantine equation; integer solution; algebraic number theory

责任编辑:李翠薇