doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0001.004

广义不变凸单调准则

向 丽 娟
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:在 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件下,推出伪不变凸单调与严格伪不变凸单调之间的关系.

关键词:伪不变凸;广义不变凸;仿射

中图分类号:O177 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)01-0013-02

广义凸在数学、管理科学、工程学、经济学和最优化理论中都担当了重要的角色,不变凸函数和不变凸单调又是研究广义凸性的重要组成部分,文献[1-4]研究了关于广义不变凸与不变凸单调;文献[4]在 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件代替条件 C 下,建立了伪不变凸单调与拟不变凸单调之间的关系.而此处是在 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件下,推出伪不变凸单调与严格伪不变凸单调之间的关系.

1 预备知识

定义 1[5] 设 X 和 Y 是实向量空间,若函数 $\phi:X\to Y$ 的映射,对 $\forall x,y\in X$,且 $\forall \lambda,\mu\in\mathbf{R}$,有
$$\phi(\lambda x+\mu y)=\lambda\phi(x)+\mu\phi(y)$$
成立,则称 ϕ 是线性函数.

定义 2[6] 设 $\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,若函数 $\phi:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的映射,对 $\forall x,y\in X$,且 $\forall \lambda\in(0,1)$,有
$$\phi(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda\phi(x)+(1-\lambda)\phi(y)$$
成立,则称 ϕ 是仿射函数.

定义 3[1] 设函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$,若对 $\forall x,y\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$ 都有
$$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$$
成立,则称 η 为 skew 函数.

定义 4[1] 设 $\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集,函数 $\theta:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 映射,

(a) 若 $\exists\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 对 $\forall x,y\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$,都有
$$\eta(y,x)^t\nabla\theta(x)\geqslant 0\Rightarrow\theta(y)-\theta(x)\geqslant 0$$
成立,则称 θ 是伪不变凸单调函数.

(b) 若 $\exists\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 对 $\forall x,y\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n,x\neq y$,都有
$$\eta(y,x)^t\nabla\theta(x)\geqslant 0\Rightarrow\theta(y)-\theta(x)>0$$
成立,则称 F 是严格伪不变凸单调函数.

2 主要结果

引理 1[4] 设集合 Γ 是集合 $\mathbf{R}^n$ 中的开凸子集,假设:

收稿日期:2014-06-11;**修回日期**:2014-07-09.

作者简介:向丽娟(1989-),女,重庆巫溪人,硕士研究生,从事凸分析研究.

(a) $\nabla\theta:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是关于函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 的严格伪不变凸单调;(b) η 关于第一变量仿射且是 skew 函数;(c) 对 $x\neq y$,都有 $\theta(x)\geqslant\theta(y)\Rightarrow\eta(x,\bar{x})'\nabla\theta(\bar{x})\geqslant 0$ 成立,其中$\bar{x}$是 x 与 y 线段上一点.则称 $\theta:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 Γ 关于 η 是严格伪不变凸的.

定理 1 设集合 Γ 是集合 $\mathbf{R}^n$ 中的开凸子集,假设:

(a) $\nabla\theta:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是关于函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 伪不变凸单调的;(b) η 关于第一变量仿射且是 skew 函数;(c) 对 $x\neq y$,都有 $\theta(x)\geqslant\theta(y)\Rightarrow\eta(x,\bar{x})'\nabla\theta(\bar{x})>0$ 成立,其中$\bar{x}=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\forall\, 0<\lambda<1$.则称 $\theta:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 Γ 关于 η 是严格伪不变凸的.

证明 设 $\forall x,y\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$, $x\neq y$,有 $\eta(y,x)'\nabla\theta(x)\geqslant 0$,需要证明 $\theta(x)>\theta(y)$.反证法,假设 $\theta(x)\leqslant\theta(y)$ 由定理 1 中的条件(c)知 $\eta(x,\bar{x})'\nabla\theta(\bar{x})>0$,其中$\bar{x}=\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y$, $\forall\, 0<\bar{\lambda}<1$.

由定理 1 中的条件(b)知 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件,有

$$\eta(\bar{x},x)'\nabla\theta(\bar{x})<0 \tag{1}$$

由式(1)和定理 1 中的条件(a)知

$$\eta(\bar{x},x)'\nabla\theta(x)<0 \tag{2}$$

由式(2)和定理中 1 的条件(b)有

$$\bar{\lambda}\eta(x,x)'\nabla\theta(x)+(1-\bar{\lambda})\eta(y,x)'\nabla\theta(x)<0 \tag{3}$$

由 η 是 skew 函数,则有

$$\eta(x,x)=0 \tag{4}$$

由式(3)(4)和 $0<\bar{\lambda}<1$,有

$$\eta(y,x)'\nabla\theta(x)<0$$

与式(1)矛盾.证毕.

参考文献:

[1] RUIZ G G, OSUNA G R, RUFIAN L A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003(144):501-512

[2] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Criteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European Journal of Operations Research, 2005(164):115-119

[3] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003(117):607-625

[4] PENG J W. Criteria for Generalized Invex Monotonicities without Condition C[J]. European Journal of Operations Research, 2006(170): 667-671

[5] RUBIN W. Functional Analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1991

[6] JABARPPTOAN T, ZAFARANI J. Generalized Invariant Monotonicity and Invexity of Non-differentiable Functions[J]. Journal of Global Optimization, 2006(36):537-564

[7] 张其茂.一类 B-预不变凸目标规划的最优性充分条件[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2009,30(6):526-528

Criteria for Generalized Invex Monotonicity

XIANG Li-juan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The relation between pseudo-invex monotonicity and strictly pseudo-invex monotonicity is derived under the condition that η is the affine in the first argument and is skew function.

Key words: pseudo-invexity; generalized invexity; affine

责任编辑:李翠薇