doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0001.003

严格伪不变单调准则

任 亚 萍
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:在 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件下,推出了严格伪不变单调与强伪不变凸之间的关系.

关键词:广义不变凸函数;广义不变凸单调;仿射

中图分类号:O177　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)01-0011-02

不变凸函数和不变凸单调是研究广义凸性的重要组成部分,文献[1-3]研究了关于广义不变凸与不变凸单调;文献[2]中指出文献[1]中的一些必要条件是错的,并在条件 C 下改正其结论;文献[4]中将条件 C 用 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数的条件所代替,建立了(严)伪不变凸单调和拟不变凸单调的必要条件.此处在 η 关于第一变量仿射且是 skew 函数条件下,推出严格伪不变单调与强伪不变凸之间的关系.

1　预备知识

定义 1[1]　设 $\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集,函数 $F:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 映射,若 $\exists\,\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 使得 $\forall x,y\in\Gamma,x\neq y$,有

$$\eta(y,x)^tF(x)\geqslant 0\Rightarrow\eta(y,x)^tF(y)>0$$

则称 F 是严格伪不变单调函数.

定义 2[2]　函数 $\theta:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 可微,若存在函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$,$\exists\,\alpha>0$ 使得 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,有

$$\eta(y,x)\nabla\theta(x)\geqslant 0\Rightarrow\theta(y)\geqslant\theta(x)+\alpha\|\eta(y,x)\|^2$$

则称 θ 是强伪不变凸函数.

定义 3[5]　设 X 和 Y 是实向量空间,若函数 $\phi:X\to Y$ 的映射,有

$$\phi(\lambda x+\mu y)=\lambda\phi(x)+\mu\phi(y)$$

其中 $\forall x,y\in X$ 且 $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则称 ϕ 是线性函数.

定义 4[6]　设 $\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,若函数 $\phi:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的映射,有

$$\phi(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda\phi(x)+(1-\lambda)\phi(y)$$

其中 $\forall x,y\in X$ 且 $\forall\lambda\in(0,1)$,则称 ϕ 是仿射函数.

定义 5[1]　设函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 的映射,若 $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,$\forall x,y\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$,则称 η 为 skew 函数.

引理 1[4]　设集合 Γ 是集合 $\mathbf{R}^n$ 中的凸子集且 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 是向量函数.若 η 是关于第一变量仿射且是 skew 函数,则 η 也是关于第二变量仿射.

2　主要结果

定理 1　设集合 Γ 是集合 $\mathbf{R}^n$ 中的开凸子集.假设

收稿日期:2014-04-25;**修回日期**:2014-05-29.

作者简介:任亚萍(1988-),女,辽宁省铁岭人,硕士,从事应用数学研究.

(i) $\nabla\theta:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是关于函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 的严格伪不变单调;

(ii) η 关于第一变量仿射且是 skew 函数;

(iii) 对 $\forall x,y\in\Gamma$ 且 $\exists\alpha>0$,有

$$\theta(y) < \theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2 \Rightarrow \eta(x,\bar{x})\nabla\theta(\bar{x}) \geqslant 0$$

其中,$\bar{x}=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\forall\lambda\in(0,1)$,则 $\theta:\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 Γ 上关于函数 η 是强伪不变凸函数.

证明 设 $x,y\in\Gamma$,有

$$\eta(y,x)^t\nabla\theta(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

需要证明,$\exists\alpha>0$,有

$$\theta(y) \geqslant \theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2 \tag{2}$$

反证法,假设 $\exists\alpha>0$,有

$$\theta(y) < \theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2 \tag{3}$$

由条件(iii)知

$$\eta(x,\bar{x})^t\nabla\theta(\bar{x}) \geqslant 0 \tag{4}$$

其中 $\bar{x}=\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y, 0<\bar{\lambda}<1$.

由式(4)与条件(i)知

$$\eta(x,\bar{x})^t\nabla\theta(x) > 0 \tag{5}$$

由(ii)和引理 1 知,η 对于第二变量是仿射的,则由式(5)知,$\exists\alpha>0$,有

$$\bar{\lambda}\eta(x,x)^t\nabla\theta(x) + (1-\bar{\lambda})\eta(x,y)^t\nabla\theta(x) > 0 \tag{6}$$

由假设 η 是 skew 函数,有 $\eta(x,x)^t=0$,所以由式(6)和 $0<\bar{\lambda}<1$,有

$$\eta(x,y)^t\nabla\theta(x) > 0$$

又由 η 是 skew 函数,有

$$\eta(y,x)^t\nabla\theta(x) < 0 \tag{7}$$

由式(7)和式(1)矛盾,则 $\exists\alpha>0$,有

$$\theta(y) \geqslant \theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2$$

参考文献:

[1] RUIZ-GARZON G, OSUNA-GOMEZ R, RUFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003 (144): 501-512

[2] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Griteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European Journal of Operational Research, 2005 (164): 115-119

[3] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003 (117): 607-625

[4] PENG J W. Criteria for Generalized Invex Monotonicities without Condition C[J]. European Journal of Operational Research, 2006 (170): 667-671

[5] RUDIN W. Functional Analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1991

[6] AUBIN J P. Optima and Equilibria—an Introduction to Nonlinear Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993

Criterion for Strictly Pseudo-invex Monotonicity

REN Ya-ping

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, under the condition that η is affine in the first argument and is skew function, the relation between strictly pseudo-invex monotonicity and strongly pseudo-invexity is generalized.

Key words: generalized invex function; generalized invex monotonicity; affine

责任编辑:李翠薇