文章编号:1672-058X(2014)12-0068-04

“人少任务多”型指派问题的一种新算法*

马 晓 娜

(宿州学院 数学与统计学院,安徽 宿州 234000)

摘　要:对于“人少任务多”型指派问题的解法,人们已经提出了很多解法,如“加边补零”法[1],“加边补最小值”法[2],只是前面提到的这些方法总体思路都是将其转化为标准指派问题来求解;对此,提出了一种不同于传统解法的差额法,方法不必一开始就去用新的矩阵去代替原系数矩阵,而是可直接在原系数矩阵上进行求解;方法简洁,直观,而且优于传统算法。

关键词:指派问题;匈牙利算法;差额

中图分类号:O221.4　　**文献标志码:**A

1　预备知识

1.1　标准指派问题[3]

标准指派问题是经济计划工作中经常遇到的一个问题。当指派个人去完成项任务时,要求满足以下 3 个前提假设:人数等于任务数;每个人必须且只需完成一项任务;每项任务必须且只需一人去完成。价值系数 C_{ij}为第 i 个人完成第 j 项任务所消耗的资源(目标函数求极小)或所得到的利益(目标函数求极大)则其数学模型如下:

$$\text{Min(Max)} \quad S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} = C_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (j = 1,2,\cdots,n);\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \tag{3}$$

对于上述最佳指派问题的线性规划问题,可用单纯形法求解。然而,由于指派问题的特殊性,用这种方法求解要比匈牙利法复杂得多。匈牙利法是目前求解标准指派问题行之有效且比较简单的解法。

1.2　标准指派问题的匈牙利算法[4]

标准指派问题的匈牙利算法大致为 4 步骤:变换价值系数矩阵,使各行各列都出现 0 元素;进行试指派,以寻求最优解;做最少的直线覆盖当前所有 0 元素;对上述所得矩阵进行变换,以增加其 0 元素。

1.3　非标准型指派问题

对于前述标准指派问题要求满足 3 个前提假设,但在实际应用中,大多的指派问题并不具备第一个假设,而第二个假设又显然不符合当今引进竞争机制后的企业、部门及社会要求,在生活实际和生产安排中,

---

收稿日期:2014-05-17;**修回日期:**2014-06-28.

* **基金项目:**宿州学院科研平台开放课题(2011YKF13).

作者简介:马晓娜(1982-),女,辽宁鞍山人,助教,硕士研究生,从事最优化理论及其应用研究.

经常会遇到非标准指派问题。常见的有 3 种类型:系数矩阵中有空位置;“人少任务多”型;“人多任务少”型。

在解决非标准指派问题时,常采用的方法是将其先转化为标准指派问题,然后再采用匈牙利算法求解,文献[5-7]对于非标准指派问题均提出了转换方法,但是这种算法比较麻烦,而且不好理解,人们只能机械的按照给出的算法步骤进行求解,并不能完全理解。因此尝试就第二种情形进一步分析讨论,提出了一种新的算法,即差额法。方法简洁,易懂。对于另外两种情形也有新的算法,在此不作讨论。

2　主要结论

2.1　差额法的算法

第 1 步:列出价值系数矩阵,求出系数矩阵中任意两行对应元素之差,将其差额以矩阵的形式列于系数矩阵右侧。

第 2 步:在差额矩阵中寻找最大元素,用符号标记出来,同时划去该元所在列的其他元素。

注意:若有几个元素同为最大,则需在原系数矩阵中查到产生这些最大差额的对应元素,选择最小元素对应的那个最大差额。

第 3 步:在原系数矩阵中找出产生此最大差额的两个对应元素,在两者中选出较小者,用符号标出,同时划去该元所在列的其他元素(目的是保证每项任务只能由一个人完成)。

注意:当系数矩阵中某行有两个或两个以上的元素被标出后,将该行在系数矩阵中划掉,同时将差额矩阵中与该行元素有关的行也划掉(目的是保证此人已完成任务,不再分配任务给他)。

第 4 步:再在差额矩阵余下的行列中寻找最大元素,其余操作同上,以寻求最优解。

2.2　实例分析

下面将结合实际问题说明一下“人少任务多”型指派问题的新算法的算法实现步骤。

例 1　分配甲、乙、丙 3 人去完成 4 项任务,每人完成各项任务时间如下所示,由于任务数多于人数,故规定其中有一个人可兼完成两项任务,其余两人每人完成一项,试确定总花费时间为最少的指派方案。

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 \\ 2 & 10 & 5 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

解　这是一个非标准型的指派问题(目标为 min 型,费用系数矩阵为非方阵)。

第 1 步:求出系数矩阵任意两行的对应元素之差,将其差额已矩阵的形式列于行右。

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 \\ 2 & 10 & 5 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

注:此处的列矩阵中的元素表示差额矩阵中对应行中元素是由原系数矩阵此两行作差所得。

第 2 步:在差额矩阵中寻找最大元素,如此处是一行三列元素 10,用标出,同时将其所在列的其他元素划去,然后在系数矩阵中选出产生此最大差额的对应两个元素,在两者中选出最小元素,如此处是二行三列元素 5,用$(5)^1$ 表示,同时划去其所在列的其他元素。

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 \\ 2 & 10 & (5)^1 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 & \odot & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

第 3 步:再在差额矩阵中剩余的列中寻找最大元素,如此处的是一行一列元素 8,用标出,同时划去该元所在列的其他元素,然后再在系数矩阵中找出产生此最大差额的对应的两个元素,在二者中选出最小元素,此处是二行一列元素 2,用$(2)^2$ 表示,此时乙已经承担两项任务了,故不再给他分配任务了,因此划去该元所在行列的其他元素(这样乙就可以不再被分配任务了)。同时将差额矩阵中与系数矩阵中有关的元素所在的行也划掉。

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 \\ (2)^2 & 10 & (5)^1 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bigcirc & 5 & \bigcirc & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

第 4 步:同样再在差额矩阵剩余的列中寻找最大元素,此处是二行四列元素 7,用标出,同时划去该元所在列的其他元素,然后再在系数矩阵中找出产生此最大差额的对应两个元素,在二者中选出最小元素,此处是三行四列元素 13,用$(13)^3$ 标出,同时划去其所在行列的其他元素(因为此人不能再承担两项任务了)。

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 \\ (2)^2 & 10 & (5)^1 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & (13)^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \odot & 5 & \odot & 5 \\ 7 & 5 & 1 & \odot \\ 1 & 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

第 5 步:对系数矩阵中未划去的行列进行操作,因为本题只剩一行二列元素 5 没被圈出,所以用$(5)^4$ 表示。至此得到了问题的最优解。

$$\begin{bmatrix} 10 & (5)^4 & 15 & 20 \\ (2)^3 & 10 & (5)^1 & 15 \\ 3 & 15 & 14 & (13)^3 \end{bmatrix}$$

例 2 求解如下指派问题,规定其中有一个人可兼完成两项任务,其余 3 人每人完成一项,试确定总花费时间为最少的指派方案。

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

解:

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & (7)^1 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & \odot \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & (6)^2 & (7)^1 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & \bigcirc & \bigcirc \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & (6)^2 & (7)^1 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & (4)^3 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & \bigcirc & \bigcirc \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \bigcirc & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & (6)^2 & (7)^1 \\ 8 & 9 & (10)^4 & 11 & 12 \\ 3 & (4)^3 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & \bigcirc & \bigcirc \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \bigcirc & 3 & 4 \\ 5 & \bigcirc & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(6)此题的最优解为
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & (6)^2 & (7)^1 \\ 8 & 9 & (10)^4 & 11 & 12 \\ 3 & (4)^3 & 6 & 8 & 10 \\ (8)^5 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

3　总　结

总之,在解决非标准指派问题时,常采用的方法是将其先转化为标准指派问题,然后再采用匈牙利算法求解,因此,对于“人少任务多”型指派问题的解法,提出了一种不同于传统解法的差额法,算例显示方法优于其他算法,因为方法不必一开始就去用新的矩阵去代替原系数矩阵,而是可直接在原系数矩阵上进行求解,但在求解时要注意一些特殊情况。

参考文献:

[1] 张新辉.任务数多于人数的指派问题[J].运筹与管理,1997,6(3):20-25
[2] 王增富.“人少任务多”最小指派问题的一种解法[J].燕山大学学报,2004,28(5):467-470
[3] 朱德通.最优化模型与实验[M].上海:同济大学出版社,2003
[4] 钱颂迪.运筹学(修订版)[M].北京:清华大学出版社,1990
[5] 吴振奎.一类广义指派问题及其解法[J].天津商学院学报,1995,15(4):80-82
[6] 白国仲.毛经中.C 指派问题[J].系统工程理论与实践,2003,3(9):107-111
[7] 张世勇.一种新的混合粒子群优化算法[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(3):241-245

(下转第 75 页)