

文章编号:1672-058X(2014)12-0049-05

基于反馈控制的分数阶时滞神经网络的同步*

张云雷, 吴然超

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

摘要:研究了分数阶时滞神经网络的同步问题, 通过使用 Mittag-Leffler 函数和线性反馈控制, 给出了同步控制器解析式, 得到了关于 Caputo 导数的时滞神经网络同步的充分条件; 系统同步的条件容易证明和实现且仅依赖于系统的结构; 最后通过数值模拟验证了理论的有效性。

关键词:全局同步; 分数阶; 神经网络; 时滞; 反馈控制

中图分类号: TP394

文献标志码: A

分数阶微积分已有 300 多年的历史, 其发展几乎与整数阶微积分同步, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮, 还是最近几十年兴起的。近期的专著主要强调分数阶微积分在物理、信号处理、生物工程、扩散波和电磁学的应用^[1-4]。由于分数阶微积分具有“记忆”和“遗传”的特性, 因此将其应用到神经网络模型中能够更加准确地描述信号输入和输出间的复杂关系。目前, 对于分数阶系统同步的研究主要是针对非时滞系统, 其主要方法是利用控制项将误差系统的非线性项消去, 得到一个线性的误差系统, 然后通过研究误差系统的稳定性, 来研究分数阶系统的同步, 如文献[5-7]。这种做法使得控制项含有非线性项, 加大了控制的难度和成本。然而, 在文献[8]中保留了误差系统的非线性项, 使得控制器只需要满足一个简单的线性控制, 当然此方法的不足之处在于必须对误差系统中的非线性项进行约束。本文主要考虑带时滞的神经网络系统同步, 选取的控制器使其误差系统含有非线性项, 优点在于使控制器相对简单。

1 预备知识

定义 1^[1] 函数 $x(t)$ 的阶数为 α 的 Caputo 导数定义为

$${}_c D_{t_0, t}^\alpha x(t) = D_{t_0, t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1)$$

其中 $n-1 < \alpha < n \in \mathbf{Z}^+$ 。

定义 2^[1] 单参数 Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (2)$$

式(2)中 $\alpha > 0, z \in C$ 。

收稿日期: 2014-04-23; 修回日期: 2014-05-10.

* 基金项目: 高等学校博士学科点专项基金(20093401120001); 安徽省自然科学基金(11040606M12); 安徽大学“211 项目”(KJJQ1102)资助.

作者简介: 张云雷(1989-), 男, 安徽淮北人, 硕士研究生, 从事非线性动力系统研究.

双参数 Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad (3)$$

式(3)中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 且 $z \in C$, 有 $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z), E_{1,1}(z) = e^z$ 。

本文所讨论的分数阶导数 D^{α} 是指 Caputo 导数 $D_{0,t}^{\alpha}$, 当 $x \in \mathbf{R}^n$, 其范数定义为 $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 。

引理 1^[8] 若 $V(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是连续函数且满足

$$D^{\alpha}V(t) \leq -\lambda V(t) \quad (4)$$

则

$$V(t) \leq V(t_0)E_{\alpha}(-\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \quad (5)$$

式(5)中 $\alpha \in (0, 1)$ 且 λ 是正常数。

引理 2^[11] 令 $\alpha < 2, \beta$ 是任意的实数, $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, 则存在 C 是一个实常数, 使得

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, (\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi), |z| > 0 \quad (6)$$

本文考虑如下具有时滞的分数阶神经网络模型:

$$D^{\alpha}x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) + I_i \quad (7)$$

或者写成向量的表示形式

$$D^{\alpha}x(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)) + I \quad (8)$$

其中 $i \in N = 1, 2, \dots, n, t \geq 0, 0 < \alpha < 1, n$ 是神经元个数, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 表示在时间 t 的状态变量, $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T$ 表示神经元的激励函数, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 表示在与神经网络不联通且无外部附加电压差的情况下第 i 个神经元恢复静息状态的速率。矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 指第 j 个神经元在 t 时刻对第 i 个神经元的影响强度, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 指第 j 个神经元在 $t-\tau$ 时刻对第 i 个神经元的影响强度, $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T$ 是指神经元的网络偏差量。

2 主要结论及其证明

在本节将得到带时滞的分数阶神经网络模型同步的充分条件, 把系统式(7)作为主系统, 其从系统为

$$D^{\alpha}y_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j(t-\tau)) + I_i + u_i(t) \quad (9)$$

写成向量的表示形式

$$D^{\alpha}y(t) = -Cy(t) + Af(y(t)) + Bf(y(t-\tau)) + I + u(t) \quad (10)$$

其中 $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 指从系统的状态变量, C, A, B 和 $f(\cdot)$ 与系统式(8)的表示相同, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ 是指控制器。

设误差向量 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ 。由主系统式(8)和从系统式(10)得误差系统的表达式:

$$D^{\alpha}e(t) = -Ce(t) + A[f(y(t)) - f(x(t))] + B[f(y(t-\tau)) - f(x(t-\tau))] + u(t) \quad (11)$$

其中 $e(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t))^T$, 因此主系统式(8)和从系统式(10)的同步问题就等价于系统式(11)的渐进稳定性问题。选取控制器 $u(t)$ 为 $u(t) = -\tilde{K}e(t) - Ke(t-\tau)$, $\tilde{K} = (\tilde{k}_{ij})_{n \times n}, K = (k_{ij})_{n \times n}$ 是指控制收益矩阵, 那么误差式(11)可以写成:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha e_i(t) = & -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] + \sum_{j=1}^n b_{ij} [f_j(y_j(t-\tau)) - f_j(x_j(t-\tau))] \\
 & - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{ij} e_j(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij} e_j(t-\tau)
 \end{aligned} \tag{12}$$

定理 1 若分数阶时滞神经网络系统式(8)和式(10)均满足 $|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v|, \forall u, v \in \mathbb{R}, L_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为正常数,控制收益矩阵 $\tilde{K} = |A|L, K = |B|L$, 其中 $L = \text{diag}(L_1, \dots, L_n)$, 且 $c_i > 0 (i=1, \dots, n)$, 那么式(8)和式(10)是同步的。

证明 若 $e_i(t) = 0$, 则 $D^\alpha |e_i(t)| = 0$ 。若 $e_i(t) > 0$, 则

$$D^\alpha |e_i(t)| = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{|e_i(s)|'}{(t-s)^\alpha} ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e_i'(s)}{(t-s)^\alpha} ds = D^\alpha e_i(t) \tag{13}$$

类似的, 如果 $e_i(t) < 0$, 那么

$$D^\alpha |e_i(t)| = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{|e_i(s)|'}{(t-s)^\alpha} ds = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e_i'(s)}{(t-s)^\alpha} ds = -D^\alpha e_i(t) \tag{14}$$

因此, 我们得到:

$$D^\alpha |e_i(t)| = \text{sgn}(e_i(t)) D^\alpha e_i(t) \tag{15}$$

考虑辅助函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tag{16}$$

由系统式(15)可以得到 $V(t)$ 的 Caputo 导数为

$$\begin{aligned}
 D^\alpha V(t) &= \sum_{i=1}^n D^\alpha |e_i(t)| \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{sgn}(e_i(t)) \{ -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n b_{ij} [f_j(y_j(t-\tau)) - f_j(x_j(t-\tau))] - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{ij} e_j(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij} e_j(t-\tau) \} \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{sgn}(e_i(t)) \{ -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n b_{ij} [f_j(y_j(t-\tau)) - f_j(x_j(t-\tau))] - \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j e_j(t) - \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j e_j(t-\tau) \} \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \{ -c_i |e_i(t)| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |e_j(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |e_j(t-\tau)| \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |e_j(t)| - \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |e_j(t-\tau)| \} \\
 &= \sum_{i=1}^n -c_i |e_i(t)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n -\lambda |e_i(t)| \\
 &= -\lambda V(t)
 \end{aligned} \tag{17}$$

式(1)中 $\lambda = \min c_i (i=1, \dots, n)$ 。根据引理 1 可知

$$V(t) \leq V(t_0) E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha) \tag{18}$$

由范数的定义

$$V(t) = \sum_{i=1}^n |e_i(t)| = \|e(t)\| \quad (19)$$

$$V(t_0) = \sum_{i=1}^n |e_i(t_0)| = \|e(t_0)\| \quad (20)$$

也就是

$$\|e(t)\| \leq \|e(t_0)\| E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha) \quad (21)$$

令 $z = -\lambda(t-t_0)^\alpha$, $|\arg(z)| = \pi$, 引理 2 可知存在一个实常数 C , 使得

$$\|e(t)\| \leq \|e(t_0)\| \frac{C}{1 + |\lambda(t-t_0)^\alpha|} \quad (22)$$

由式(12)可知, 当 t 趋于无穷大时, $\|e(t)\|$ 是渐进趋于零的, 分数阶时滞神经网络系统式(8)和式(10)是全局同步的。

3 数值模拟

考虑如下具有时滞的分数阶神经网络模型

$$D^\alpha x(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)) \quad (23)$$

$$\text{其中 } x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T, C = \text{diag}(1, 1, 1), A = \begin{bmatrix} 2 & -1.2 & 0 \\ 2 & 1.71 & 1.15 \\ -4.75 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1.2 & 0 \\ 1 & 1.71 & 1.15 \\ -4.75 & 0 & 1.1 \end{bmatrix},$$

$f(x(t)) = (\tanh(x_1(t)), \tanh(x_2(t)), \tanh(x_3(t)))^T$, 当 $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ 时, 函数 f 满足定理 1 中的条件, 取 $\tau = 0.1$ 。取系统式(23)的从系统为

$$D^\alpha y(t) = -Cy(t) + Af(y(t)) + Bf(y(t-\tau)) + u(t) \quad (24)$$

选取控制器 $u(t)$ 中的 $\tilde{K} = |A|L = \begin{bmatrix} 2 & 1.2 & 0 \\ 2 & 1.71 & 1.15 \\ 4.75 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}, K = |B|L = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 0 \\ 1 & 1.71 & 1.15 \\ 4.75 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}$ 。根据定理 1 可知系

统式(23)和系统式(24)是同步的。数值模拟中, 分别取主系统与从系统的初始值为 $x(0) = (0.1, 0.4, 0.2)^T$ 和 $y(0) = (0.2, 0.5, 0.3)^T$ 。图 1 表示其误差系统的轨迹。根据数值模拟所得图形图 2 与文献[8]中图形相比较可知, 本文在加入时滞项且使误差系统保留非线性项的情况下, 误差系统的收敛效果基本相同。

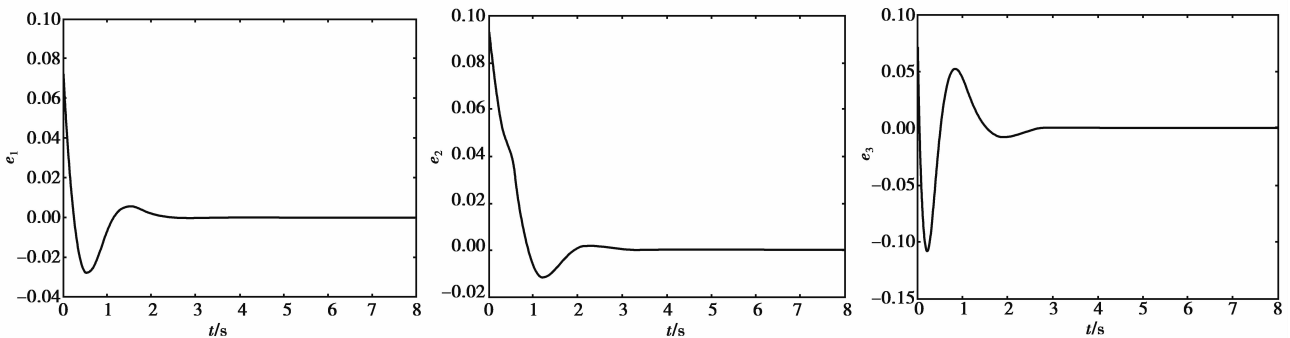


图 1 系统式(23)与系统式(24)的误差系统的时间响应曲线, $\alpha = 0.96$

4 结 论

由于时滞在生物神经网络中的不可避免性,因此时滞神经网络相比较非时滞神经网络更具有一般性,对时滞神经网络的研究更具有理论意义和实际应用价值。本文基于反馈控制的方法对分数阶时滞神经网络的同步问题进行了讨论,通过线性反馈控制给出了时滞神经网络同步的充分条件,并提供了一种简易的同步控制器设计方法。数值仿真验证了所得理论的正确性。

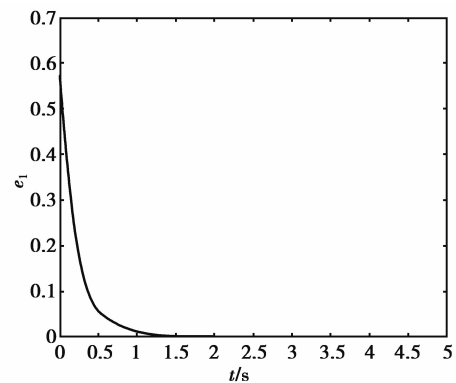


图 2 文献[8]中误差系统的时间响应曲线

参考文献:

- [1] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. Academic Press; San Diego, CA, USA, 1999
- [2] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. World Scientific York; Singapore, 2000
- [3] KILBAS A, SRIVASTAVA H, TRUJILLO J. Theory and application of fractional differential equations[M]. Elsevier; New York, NY, USA, 2006
- [4] SRIVASTAVA H, OWA S. Univalent functions, fractional calculus and their applications[M]. Prentice Hall; New Jersey, NJ, USA, 1989
- [5] 王兴元,贺毅杰.分数阶统一混沌系统的投影同步[J].物理学报,2008,57(3):1485-1492
- [6] 陈向荣,刘崇新,李永勋.基于非线性观测器的一类分数阶混沌系统完全状态投影同步[J].物理学报,2008,57(3):1453-1457
- [7] 罗润梓,魏正民,邓述程.分数阶 Lorenz 混沌系统的修正投影同步[J].南昌大学学报:工科版,2009,31(1):22-28
- [8] CHEN L P, QU J F, CHAI Y. Synchronization of a class of fractional-order chaotic neural networks[J]. Entropy, 2013, 15(8): 3265-3276

Synchronization of Fractional-order Neural Network with Delay Based on Feedback Control

ZHANG Yun-lei, WU Ran-chao

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: This paper studies the synchronization problem of fractional-order neural network with delay, gives the analytic formula of synchronized controller by using Mittag-Leffler function and linear feedback control, receives the sufficient condition for delay neural network synchronization on Caputo derivative, i.e., the condition for system synchronization is easy to be proved and be implemented as well as only depends on the structure of the system, and finally verifies the validity of the theory by numerical simulation.

Key words: global synchronization; fractional-order; neural network; delay; feedback control

责任编辑:代小红