文章编号:1672-058X(2014)12-0038-04

“微积分”课程教学中若干问题的辨析*

吴永锋
(铜陵学院 数学计算机学院,安徽 铜陵 244000)

摘 要:针对“微积分”课程中若干易混淆与误解的问题,作者通过举例的方法,指出了这些问题常见的理解误区,并对这些问题进行了辨析;同时举例说明了“微积分”课程中若干常见方法的使用.

关键词:微积分;辨析;教学
中图分类号:O172 **文献标志码**:A

“微积分”课程是经济类、管理类专业的基础课程之一,也是学生们感觉较为困难的课程之一.学好这门课程可以为学生将来从事经济计量分析提供一个有力的工具,同时对于学生逻辑思维能力的培养和创新思维的开发有着重要的作用.在“微积分”课程的教学过程中,作者发现很多学生对于教材中的一些重要概念理解不够深刻,容易发生混淆.通过举例说明的方法,对“微积分”课程中的若干问题进行辨析,同时举例说明了“微积分”课程中若干常见方法的使用.

1 可导与连续

目前,绝大部分微积分教材[1,2]中都给出了如下命题:若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.其实命题的条件可以减弱.

给出如下命题:若函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在,则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.这里并不要求 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$,而仅仅要求 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在.事实上,若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在,则可以分别得到 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.否则,会有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty,\ f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$$

这与 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 存在相矛盾.因此,得到 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

对于命题“若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 至少有一个不存在,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处处不可导”,很多学生经常误认为是正确的.举反例 1 如下:

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$,于是有 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$.由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 属于“振荡型”不存在,故 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在,然而 $f'(0)=0$ 却存在.

收稿日期:2014-03-09;修回日期:2014-04-08.
* 基金项目:教育部人文社科青年基金(12YJCZH217);安徽省自然科学基金(1308085MA03).
作者简介:吴永锋(1977-),男,安徽枞阳人,副教授,硕士,从事随机极限理论研究.

另外,有的学生常有以下误解,认为$f(x)$在x_0处连续,则必存在$\delta>0$,在$U_\delta^0(x_0)$内$f(x)$亦连续,这是不正确的,现举反例 2 如下.

例 2　设$D(x)$为狄利克雷函数,即$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q}\\ 0, & x\notin \mathbf{Q}\end{cases}$.令$f(x)=xD(x)$,$x_0=0$,则有$f(0)=0$.而由无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量可知,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$,故$f(x)$在$x_0=0$处连续.若$x_0\neq 0$且为无理数,则$f(x_0)=x_0\times 0=0$.注意到当$x$沿有理数趋于$x_0$时,$f(x)=xD(x)\to x_0\neq 0$,即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,于是$f(x)$在$x_0$处不连续.综上所述,$f(x)$在$U_\delta^0(x_0)$内的任意无理数$x_0$处均不连续.

2　罗必塔法则

罗必塔法则是求解极限的重要方法,但在使用该法则时要注意适用的条件.

例 3　设函数$f(x)$在x_0处的二阶导数$f''(x_0)$存在,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

证明　由于$f''(x_0)$存在,故$f(x)$在x_0的某个邻域内可导,从而$f(x_0+h)$,$f(x_0-h)$在x_0的某个邻域内可导、连续.于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)+f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}=\\&\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right\}=\\&\frac{1}{2}\{f''(x_0)+f''(x_0)\}=f''(x_0)\end{aligned}$$

有的学生给出如下证明方法:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0)\end{aligned}$$

事实上,这种方法是错误的.由于仅仅知道$f''(x_0)$存在,却并不知道$f''(x)$在x_0处邻域内是否存在,以及$f''(x)$在x_0处是否连续,故还不能断定$\lim\limits_{h\to 0}f''(x_0\pm h)=f''(x_0)$.

另外,如果在使用罗必塔法则过程中出现“振荡型”不存在时,罗必塔法则就失效了.此时,需要改用其他方法来确定所求极限的值.

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解　这是属于$\dfrac{0}{0}$型未定式,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x}$$

而后者的极限属于“振荡型”不存在,此时罗必塔法则失效.然而,这并不表明原极限不存在.事实上,正确的解法应为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

3 拐点与极值

如果$(x_0,f(x_0))$是$f(x)$的一个拐点,则$f''(x)$在x_0的左右邻域内是异号的.而如果$f(x_0)$是$f(x)$的一个极值,则$f'(x)$在x_0的左右邻域内是异号的.表面上看,拐点与极值分别由不同阶的导数控制,似乎并无关联.但在某些情况下,二者之间是存在一些联系的.

例 5 设$f(x)$二阶可导,$(x_0,f(x_0))$是$f(x)$的一个拐点,则以下说法正确的是( ).

A 在$x=x_0$处,$f'(x)$取得极值.

B 在$(x_0,f(x_0))$处,曲线$y=f(x)$的切线不存在.

C 在$x=x_0$处,$f(x)$取得极值.

D 以上结论均不一定成立.

这道题的正确答案是 A.事实上,由$f(x)$二阶可导及$(x_0,f(x_0))$是拐点,$f''(x)$在x_0的左右邻域内是异号的.从而,对于函数$f'(x)$而言,其导数$f''(x)$在x_0的左右邻域内是异号的.由极值的第一判定定理可知,$f(x_0)$是$f'(x)$的极值.

4 由待证结论构造辅助函数

众所周知,中值定理是微积分中的重点与难点,文献[3,4]研究了中值定理“中间点”的若干问题.在应用罗尔定理或拉格朗日定理证明中值等式时,经常会使用“由待证结论构造辅助函数”的方法,构造这类函数的主要步骤是:

(1)将所要证明的等式进行移项,使其左端是ξ的函数,而右端是零或常数;

(2)将移项后等式中的ξ用x代替,如果此时左端可以整理为某函数在点x处的导数,则设此函数为辅助函数$F(x)$,最后利用中值定理去证明.

例 6 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$f(0)=f(1)=0$,试证:至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$.

分析:将要证的等式移项,并以x代替ξ,得$(1-x)f''(x)-2f'(x)=0$.注意到$(1-x)f''(x)-2f'(x)=((1-x)f(x))''$,故必须使用两次罗尔定理.

证明 构造辅助函数$F(x)=(1-x)f(x)$,由$f(x)$二阶可导可知$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且由题设条件知$F(0)=F(1)=0$.于是由罗尔定理,至少存在一点$\eta\in(0,1)$,使得$F'(\eta)=0$.同理,$F'(x)$在$[1,\eta]$上连续,在$(1,\eta)$内可导,且$F'(\eta)=F'(1)=0$.所以再次由罗尔定理,至少存在一点$\xi\in(1,\eta)\subset(0,1)$,使得$F''(\xi)=0$,也即$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$成立.

例 7 设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,(a,b)内可导且$f(a)=f(b)=0$,证明:对任意$\lambda\in(-\infty,+\infty)$,均存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)+\lambda f'(\xi)=0$.

分析:很明显要想构造一个函数$F(x)$,使得$F'(\xi)=f'(\xi)+\lambda f'(\xi)$是不可能的,但是否可以在$f'(\xi)+\lambda f'(\xi)=0$两边乘以一个非零因子,使得$f'(\xi)+\lambda f'(\xi)$乘以这个非零因子成为某个函数$F(x)$在$\xi$处的导数呢?这一点是解决该问题的关键.

证明　构造辅助函数 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导且 $F(a)=F(b)=0$.于是由罗尔定理,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$.而 $F'(x)=e^{\lambda x}f'(x)+\lambda e^{\lambda x}f(x)$,从而 $e^{\lambda\xi}f'(\xi)+\lambda e^{\lambda\xi}f(\xi)=0$,也即 $f'(\xi)+\lambda f'(\xi)=0$.

5　初等函数的导函数并非一定是初等函数

初等函数的导数是初等函数吗?这个问题在教学中并未引起清晰的认识,在现有的部分教材中也予以肯定的论述[5-7].但实际上,该问题的回答是否定的,下文将举例说明.初等函数是基本初等函数经过有限次四则运算与复合而得到的,分段函数一般不是初等函数,但如果其可以用一个解析式表达,则其应为初等函数,如函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$.

例 8　函数 $f(x)=x^{\frac{1}{5}}\sin x$ 是初等函数,可以发现该函数在 $x=0$ 处有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{5}}\dfrac{\sin x}{x}=0$,而在 $x\neq0$ 处有 $f'(x)=\dfrac{1}{5}\sin x\cdot x^{-\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{5}}\cos x$.

于是 $f(x)$ 的导数为

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\sin x\cdot x^{-\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{5}}\cos x, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

而它不是初等函数.

参考文献:

[1] 李天胜.微积分[M].成都:电子科技大学出版社,2008

[2] 洪毅.数学分析(上册)[M].广州:华南理工大学出版社,2001

[3] 帅雁丹.Lagrange 中值定理“中间点”的渐进性[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2009,26(5):437-438

[4] 伍建华,孙霞林,熊德之.关于第二积分中值定理“中间点”的一个注记[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(1):4-7

[5] 王绵森,马知恩.工科数学分析基础(上册)[M].北京:高等教育出版社,1998

[6] 胡传孝.高等数学的问题、方法与结构[M].武汉:武汉大学出版社,1997

[7] 张筑生.数学分析新讲(第一册)[M].北京:北京大学出版社,1990

Analysis of Several Problems in the Teaching of the Course of Calculus

WU Yong-feng

(School of Mathematics and Computer, Tongling University, Anhui Tongling 244000, China)

Abstract: According to several issues easily confused and misunderstood in Calculus, the author uses examples to points out the problems which are commonly misunderstood, analyzes these problems and meanwhile uses the examples to unravel the application of several common methods in the course of Calculus.

Key words: Calculus; analysis; teaching

责任编辑:李翠薇