

文章编号:1672-058X(2014)12-0011-07

分数阶四翼超混沌系统的控制与同步

李瑞军

(山西工程技术学院 基础部,山西 阳泉 045000)

摘 要:四翼混沌吸引子的系统信号具有较宽的频谱带宽,在保密通信领域中具有重要的应用价值,研究四翼混沌吸引子的同步问题具有重要的意义;研究了一个新的分数阶四翼超混沌系统的控制与同步;基于分数阶系统稳定性定理,设计了非线性控制器实现了系统的镇定;通过构造合适的非线性观测器作为响应系统设计了一个系统同步方案,理论分析与数值模拟均验证了所得结果的准确性与有效性。

关键词:分数阶;超混沌系统;同步;控制

中图分类号:O415.5

文献标志码:A

分数阶微积分是整数阶微积分的扩展,它是指微分和积分为分数阶或任意阶,近几年来,分数阶系统被广泛应用,受到很多学者的关注和研究,近期的专著主要强调分数阶微积分在信号处理、生物工程、扩散波和电磁学的应用^[1-6]。分数阶算子能够更准确的描述实际超混沌系统的动力学行为,且分数阶超混沌系统的控制与同步在保密通信、系统控制及信息处理等其他领域比整数阶混沌系统具有更为突出的应用前景和发展前途,因此分数阶超混沌系统的控制与同步研究已经引起了国内外研究人员的广泛关注。并且已经取得了一定的成果,如文献[7]研究了一类新的分数阶超混沌系统的同步,文献[8]介绍了基于非线性控制的分数阶超混沌 Chen 系统与新系统的自适应同步,文献[9]研究了分数阶四翼超混沌系统与分数阶 Chen 系统的异结构同步,文献[10]研究了带有未知参数的分数阶超混沌 Lorenz 系统的自适应追踪控制与同步。

1 预备知识

分数阶微积分(Fractional Calculus)是研究任意阶微分与积分的理论,是普通的整数阶微积分向非整数阶的推广。关于分数阶微积分的定义和数值算法有很多不同的形式,采用应用最为广泛的 Caputo 定义。

定义 1^[1] 函数 $f(t)$ 的阶数为 α 的 Caputo 导数定义为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = J^{n-\alpha} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (1)$$

式(1)中, $n-1 \leq \alpha < n$, J^β 是 $\beta(\beta > 0)$ 阶 Riemann-Liouville 积分算子,定义如下:

$$J^\beta \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (2)$$

使用 Caputo 定义的分数阶微分,对于初始值 $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$,它们具有各自的含义,这些初始值涉及整数阶定义,具有清楚的物理含义并且容易测量和获得,正因如此才使得 Caputo 定义的分数阶微分得到了最广泛的应用。

收稿日期:2014-05-22;修回日期:2014-06-03.

作者简介:李瑞军(1970-),男,山西阳泉人,讲师,硕士,从事混沌控制与同步研究.

引理 1^[5] 考虑分数阶线性系统 $D^\alpha x = Ax$, 其中 $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$, $\alpha \in (0, 1]$, 那么系统 $D^\alpha x = Ax$ 是渐近稳定的, 如果矩阵 A 的任意特征值 λ 有 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ 成立; 系统 $D^\alpha x = Ax$ 是稳定的, 如果矩阵 A 的任意特征值 λ 有 $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ 成立。

2 分数阶四翼超混沌系统

2.1 分数阶超混沌系统动力学特性分析

研究一个新的分数阶四翼超混沌系统^[11], 其数学表达式如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt} = ax - yz + w \\ \frac{d^q y}{dt} = xz - by \\ \frac{d^q z}{dt} = xy - cz + xw \\ \frac{d^q w}{dt} = -y \end{cases} \quad (3)$$

其中 $0 < q \leq 1$, a, b, c 均为未知参数。若取 $a = 8, b = 40, c = 14.9$, 则上述分数阶四翼超混沌系统变为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt} = 8x - yz + w \\ \frac{d^q y}{dt} = xz - 40y \\ \frac{d^q z}{dt} = xy - 14.9z + xw \\ \frac{d^q w}{dt} = -y \end{cases} \quad (4)$$

利用分数阶微积分数值算法, 研究了分数阶超混沌系统式(4)的动力学行为, 微分阶数 q 取合适的值时, 系统式(4)将表现出混沌现象。当 $q = 0.98$ 时, 分数阶超混沌系统式(4)的典型超混沌吸引子如图 1 所示。

2.2 分数阶超混沌系统的平衡点及其稳定性分析

令

$$\begin{cases} 8x - yz + w = 0 \\ xz - 40y = 0 \\ xy - 14.9z + xw = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

求解方程组式(5), 易知点 $E(0, 0, 0, 0)$ 是系统式(4)的唯一的平衡点。系统式(5)在 $E(0, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 8 & -z & -y & 1 \\ z & -40 & x & 0 \\ y + w & x & -14.9 & x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

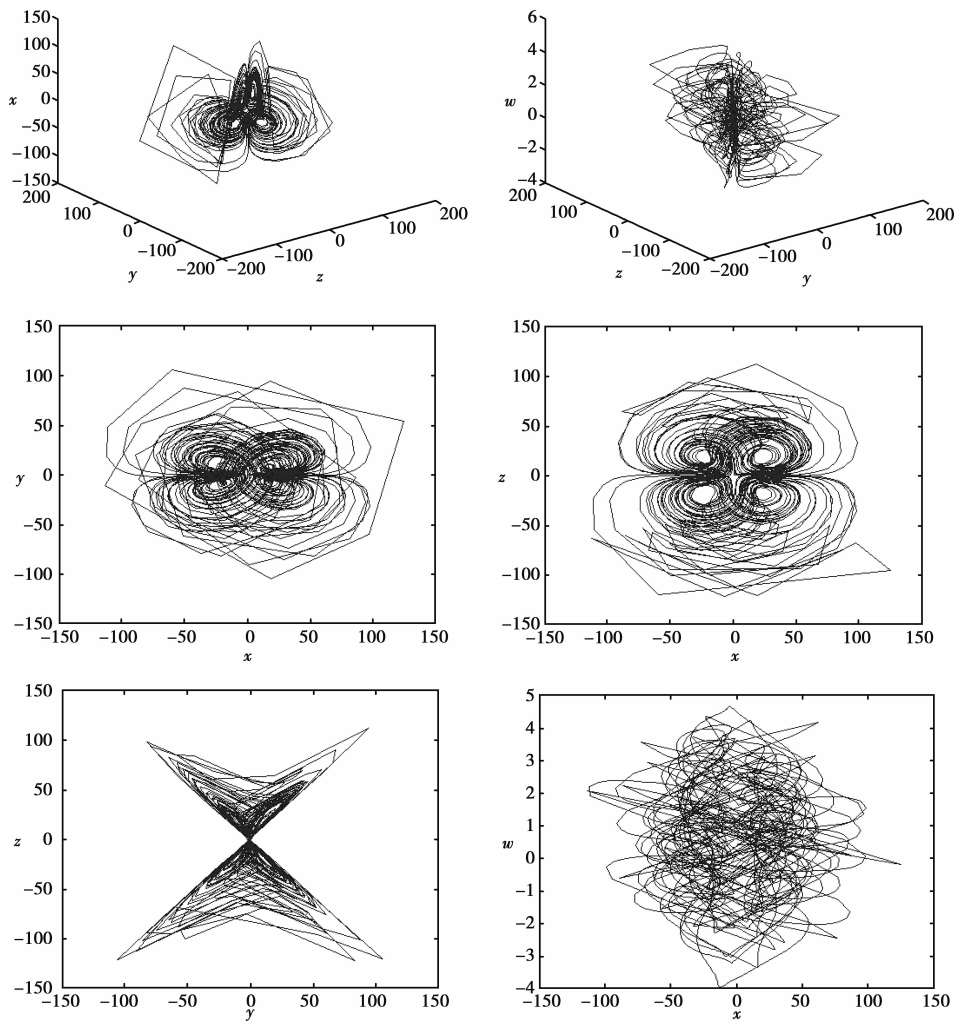


图 1 分数阶超混沌系统式(4)的混沌吸引子

那么系统在平衡点 $E(0,0,0,0)$ 处的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 8)(\lambda + 40)(\lambda + 14.9) = 0 \quad (7)$$

易知式(7)的特征根为 $\lambda_1=0, \lambda_2=8, \lambda_3=-40, \lambda_4=-14.9$, 由于存在 $\lambda_2=8>0$, 由分数阶系统的稳定性理论可知平衡点 $E(0,0,0,0)$ 是不稳定的。下面将对不稳定平衡点 E 进行超混沌控制, 使之镇定。

2.3 分数阶四翼超混沌系统的控制

采取非线性反馈控制法将系统式(4)的超混沌运动镇定到不稳定平衡点 $E(0,0,0,0)$ 。设 u_1, u_2, u_3, u_4 为反馈外部输入控制, 它们可以使系统式(5)镇定到不稳定平衡点 $E(0,0,0,0)$, 其中 $u_1 = -k_1x + yz, u_2 = -k_2y - xz, u_3 = -k_3z - xy - xw, u_4 = -k_4w, k_1, k_2, k_3, k_4$ 是反馈增益。系统式(4)的受控形式为

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt} = 8x - yz + w + u_1 \\ \frac{d^q y}{dt} = xz - 40y + u_2 \\ \frac{d^q z}{dt} = xy - 14.9z + xw + u_3 \\ \frac{d^q w}{dt} = -y + u_4 \end{cases} \quad (8)$$

将 u_1, u_2, u_3, u_4 具体表达式代入式(8)时受控系统变为

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt} = (8 - k_1)x + w \\ \frac{d^q y}{dt} = (-40 + k_2)y \\ \frac{d^q z}{dt} = (-14.9 + k_3)z \\ \frac{d^q w}{dt} = -y - k_4 w \end{cases} \quad (9)$$

将受控系统式(9)写成矩阵的形式如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^q x}{dt} \\ \frac{d^q y}{dt} \\ \frac{d^q z}{dt} \\ \frac{d^q w}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - k_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.9 + k_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (10)$$

由分数阶线性系统的稳定性理论可知,当 $|\arg(\text{spec}(A))| > 0.5q\pi$ 时,有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, 则受控系统式(10)渐近稳定到 $E(0, 0, 0, 0)$ 。

取 $(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \lambda_4(A)) = (-5, -7, -4, -1)$ 即可满足上述条件,使得系统镇定到 E 点。利用极点配置技术,可求得 $k_1 = 5, k_2 = 33, k_3 = 10.9, k_4 = 1$, 则受控系统式(10)变为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^q x}{dt} \\ \frac{d^q y}{dt} \\ \frac{d^q z}{dt} \\ \frac{d^q w}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据预估-校正算法进行数值仿真,在这里选取 $q = 0.98$, 初始值 $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (1.23, 0.89, 2.37, 0.44)$, 仿真结果如图 2 所示,从图 2 知,不稳定平衡点 $E(0, 0, 0, 0)$ 得到了有效地控制。

3 分数阶四翼超混沌系统的同步

采用基于非线性状态观测器法对所提出的分数阶四翼超混沌系统进行混沌同步。考虑如下分数阶超混沌驱动系统:

$$\frac{d^q x}{dt^q} = Ax + Bf(x) + C \quad (12)$$

其中 $0 < q \leq 1, A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times n}, C \in \mathbf{R}^n, f(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是非线性映射, Ax 为线性部分, $Bf(x)$ 为非线性部分, C 为常数矩阵。

假定系统式(12)的输出由下式确定:

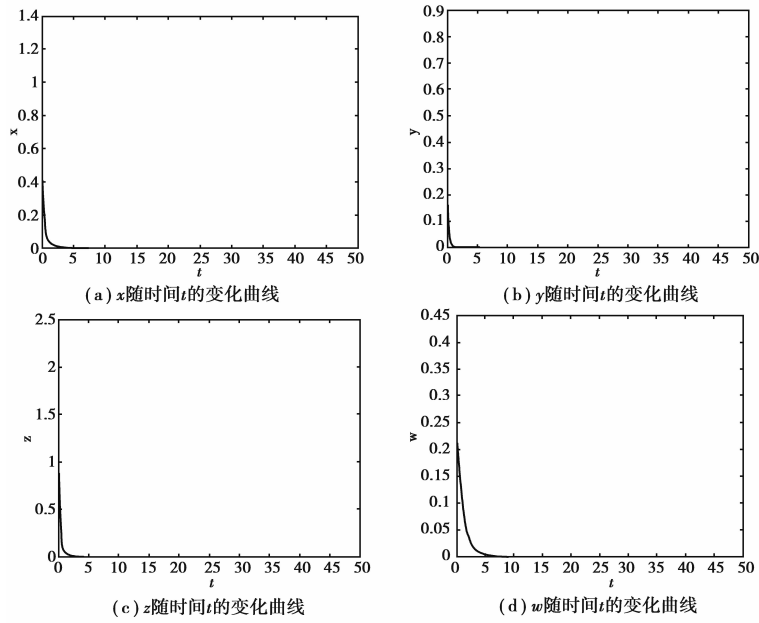


图 2 利用非线性反馈法系统式(11)的时间响应曲线

$$s(x) = Kx + C \quad (13)$$

式(13)中 $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为反馈增益矩阵。分数阶非线性状态观测器(即响应系统)设计为

$$\frac{d^q y}{dt^q} = Ay + Bf(y) + C - (s(y) - s(x)) \quad (14)$$

设分数阶驱动系统式(12)和分数阶响应系统式(14)的同步误差为 $e = y - x$, 根据分数阶微分的性质, 可得误差系统为

$$\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q y}{dt^q} - \frac{d^q x}{dt^q} = Ae - (Ky + C - Kx - C) = (A - K)e \quad (15)$$

式(15)中 $(A-K)$ 为不变矩阵。由分数阶线性系统的稳定性理论知, 当 $|\arg(\text{spec}(A-K))| > 0.5q\pi$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 即分数阶驱动系统式(12)和分数阶响应系统式(14)达到同步。根据控制理论中的极点配置技术, 选取适当的反馈增益矩阵 K , 可以使得 $|\arg(\text{spec}(A-K))| > 0.5q\pi$, 从而实现两个分数阶系统的混沌同步。

所研究的分数阶超混沌系统可以写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^q x_1}{dt} \\ \frac{d^q y_1}{dt} \\ \frac{d^q z_1}{dt} \\ \frac{d^q w_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 z_1 \\ x_1 w_1 \\ y_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

矩阵 A, B, C 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = 0 \quad (17)$$

若选取输出 $s(x) = Kx + C$, 则响应系统为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^q x_2}{dt} \\ \frac{d^q y_2}{dt} \\ \frac{d^q z_2}{dt} \\ \frac{d^q w_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 y_2 \\ x_2 z_2 \\ x_2 w_2 \\ y_2 z_2 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ w_2 - w_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

由于矩阵 A, K 可控, 取 $(\lambda_1(A-K), \lambda_2(A-K), \lambda_3(A-K), \lambda_4(A-K)) = (-10, -8, -3, -7)$, 可满足条件 $|\arg(\text{spec}(A-K))| > 0.5q\pi$, 利用极点配置技术, 可求得反馈增益矩阵 K 为

$$K = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

根据式(16)、(18)及反馈增益矩阵 K , 可以得出误差系统为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^q e_1}{dt} \\ \frac{d^q e_2}{dt} \\ \frac{d^q e_3}{dt} \\ \frac{d^q e_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

采用预估—校正算法, 选取驱动系统式(16)和响应系统式(18)的初始值 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0), w_1(0)) = (4, -3, 7, 3)$, $(x_2(0), y_2(0), z_2(0), w_2(0)) = (3, -4, 5, 6)$, 则误差系统式(19)的初始值 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_4(0)) = (1, 1, 2, -3)$, 其误差分数阶超混沌系统的时间响应曲线如图3所示。

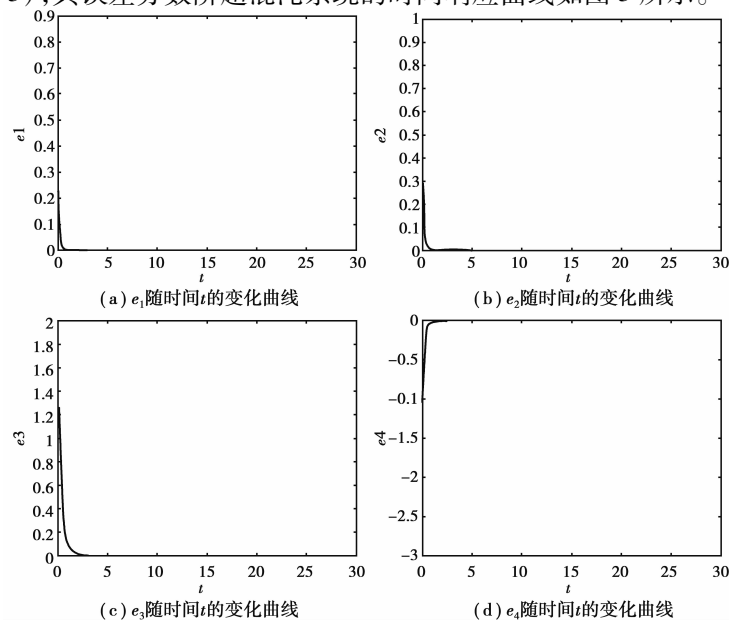


图3 误差系统式(19)的时间响应曲线

4 结 论

基于分数阶微分系统稳定性定理,研究了一个新的分数阶四翼超混沌系统的同步与控制;利用非线性反馈法实现了此分数阶超混沌系统的混沌控制,然后再利用非线性状态观测器法实现了混沌系统的混沌同步;严格的数学理论推导与数值仿真均验证了理论结果的有效性。

参考文献:

- [1] PODLUBNYI. Fractional differential equations[M]. USA: Academic Press San Diego CA USA, 1999
- [2] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. World Scientific York; Singapore, 2000
- [3] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and application of fractional differential equations[M]. Elsevier; New York NY USA, 2006
- [4] SRIVASTAVA H M, OWA S. Univalent functions fractional calculus and their applications[M]. Prentice Hall; New Jersey NJ USA, 1989
- [5] MATIGNON D. Stability properties for generalized fractional differential systems[J]. EDP Sciences, 1998, 15: 145-158
- [6] 袁幼成, 周宗福, 周辉. 一类分数阶微分方程共振边值问题解的存在性[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2012, 29(3): 1-6
- [7] WU X, LU H, SHEN S. Synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system[J]. Physics Letters A, 2009, 27: 2329-2337
- [8] MATOUK, A E, ELSADANY A A. Achieving synchronization between the fractional-order hyperchaotic novel and Chen systems via a new nonlinear control technique[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 29: 30-35
- [9] 屈双惠, 张彩霞, 杨志宏, 等. 分数阶四翼超混沌系统和分数阶 Chen 系统的异结构同步[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2014(1): 22
- [10] 赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉. 参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统的自适应追踪控制与同步[J]. 物理学报, 2010(4): 2305-2309
- [11] DADRAS S, MOMENI H R, QI G Y. Four-wing hyperchaotic attractor generated from a new 4D system with one equilibrium and its fractional-order form[J]. Nonlinear Dynamic, 2012, 67: 1161-1173

Control and Synchronization of Fractional Order Four-winged Hyperchaotic System

LI Rui-jun

(Department of Basic Courses Teaching, Shanxi Institute of Technology, Shanxi Yangquan 045000, China)

Abstract: The system signal of a four-winged chaotic attractor has relatively wider frequency bandwidth and has important application value in the secret communication field, as a result, the research on the synchronization of four-winged chaotic attractor is of important significance. This paper studies the control and synchronization of a new fractional order four-winged hyperchaotic system, designs a nonlinear controller to implement the stabilization of this system based on the stability theorem of fractional order, and designs a synchronization scheme of this system via constructing a proper nonlinear observer as a response system. Both theoretical analysis and numerical simulation prove the accuracy and validity of the received results.

Key words: fractional order; hyperchaotic system; synchronization; control

责任编辑: 田 静