

文章编号:1672-058X(2014)11-0010-07

求解非线性互补问题的非单调算法*

侯春莉¹, 王宣战²

(1. 淄博师范高等专科学校 数理科学系, 山东省 淄博市 255130;

2. 中国石油大学(华东) 理学院, 山东省 青岛市 266580)

摘要:利用价值函数将非线性互补问题等价转化为带有非负约束的最优化问题, 结合 Gu N. Z. 新的非单调搜索技术, 提出新的求解非线性互补问题的非单调下降算法; 并在适当的条件下, 证明了算法的全局收敛性; 用数值例子验证算法的有效性.

关键词:互补问题; 价值函数; 非单调技术; 全局收敛性

中图分类号: O221.2

文献标志码: A

0 引言

标准的非线性互补问题(Nonlinear Complementarity Problem, 简称 NCP)就是求一个向量 $x^* \in \mathbf{R}^n$ 使得

$$x^* \geq 0, F(x^*) \geq 0, \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0$$

其中 F 是 \mathbf{R}^n 到自身的一个映射, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbf{R}^n 中的内积. 当 S 为 \mathbf{R}^n 的非负卦限时, VIP (Variational Inequality Problems) 和 NCP 是完全等价的. VIP 和 NCP 是应用数学中的一个十分重要的研究领域, 在数学规划、力学、工程、经济、交通等许多领域有广泛的应用^[1,2]. 此处将利用非线性互补问题的价值函数, 结合 Gu. N. Z.^[3] 的非单调搜索技术提出新的求解非线性互补问题的非单调下降算法, 该算法中的 Gu. N. Z. 的非单调技术继承了 Grippo^[4], Zhang H. C.^[5] 非单调技术优点, 同时避免了 M, η_k, Q_k 参数选取, 进一步增大了搜索步长, 减少了迭代次数, 加快了算法收敛; 并在 $F(x)$ 为强单调时, 证明了算法的全局收敛性; 用数值例子验证算法的有效性.

1 算法

Solodov 在文献[6]中提出的价值函数引起人们的极大兴趣, 它将 NCP 等价转化为一个带有简单非负约束的优化问题. 文献[6]的价值函数定义如式(1):

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi(x^i, F^i(x)) \quad (1)$$

其中 x^i 和 $F^i(x)$ 分别表示向量 x 和 $F(x)$ 的第 i 个分量, $\psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\psi(a, b) = a [b]_+^2 + [-b]_+^2, a, b \in \mathbf{R} \quad (2)$$

收稿日期:2014-04-27; 修回日期:2014-05-28.

* 基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助(11CX06087A).

作者简介:侯春莉(1980-), 女, 山东东营人, 理学硕士, 讲师, 从事应用数学研究.

显然有 $\Psi(x)$ 在 \mathbf{R}_+^n 上是非负的,同时当 $F(x)$ 连续可微时, $\Psi(x)$ 也连续可微.

由文献[6]可以将非线性互补问题(NCP)等价转化为一个带有非负约束的最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \Psi(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

显然 $x \in \mathbf{R}_+^n$, $\Psi(x)=0$ 时, x 也是 NCP 的一个解.

由式(1)(2)给出价值函数 $\Psi(x)$ 的梯度

$$\nabla \Psi(x) = \frac{\partial \psi(x, F(x))}{\partial a} + \nabla F(x)^\top \frac{\partial \psi(x, F(x))}{\partial b}$$

定义

$$d := - \frac{\partial \psi(x, F(x))}{\partial b} = - 2X [F(x)]_+ + 2 [-F(x)]_+ \quad (3)$$

其中 $X = \text{diag}(x^1, x^2, \dots, x^n)$. 下面由引理 1 说明 d 是一个可行方向,进一步由引理 2 说明 d 是一个下降方向.

引理 1 设 $x_k \geq 0$ 是算法(NCPNMDA)产生的第 k 个迭代点, x_{k+1} 是算法(NCPNMDA)产生的第 $k+1$ 个迭代点,由算法(NCPNMDA)知, λ_k 为迭代步长, d_k 是由式(5)定义的. 如果

$$t_k = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{2F^i(x_k)} \mid x^i > 0, F^i(x_k) > 0 \right\}$$

则有 $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \geq 0$.

证明 对于每一个分量

$$\begin{aligned} x_{k+1}^i &= x_k^i + \lambda_k d_k^i = \\ &= x_k^i - 2\lambda_k x_k^i [F^i(x_k)]_+ + 2\lambda_k [-F^i(x_k)]_+ = \\ &= \begin{cases} x_k^i + 2\lambda_k [-F^i(x_k)]_+, & F^i(x_k) \leq 0 \\ x_k^i - 2\lambda_k x_k^i [F^i(x_k)]_+, & F^i(x_k) > 0 \end{cases}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

当 $F^i(x_k) \leq 0$ 时, 有 $x_{k+1}^i \geq 0$; 当 $F^i(x_k) > 0$ 时, 由 $t_k = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{2F^i(x_k)} \mid x^i > 0, F^i(x_k) > 0 \right\}$, $\omega_k = \min \{ \omega, t_k \}$, $\lambda_k = \omega_k^{m_k}$

得 $x_{k+1}^i = x_k^i + \lambda_k d_k^i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. 证毕.

下面,假定映射 F 在 \mathbf{R}^n 上是强单调的,即 $\exists \mu > 0$,使得

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

引理 2 假设 $F(x)$ 是连续可微的且是模为 μ 强单调的,则 d_k 是价值函数 $\Psi(x)$ 在 x_k 处的一个下降方向,即 $\nabla \Psi(x)^\top d \leq 0$.

证明 由 $F(x)$ 是模为 μ 强单调的,即

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

则有

$$\langle \nabla F(x)y, y \rangle \geq \mu \|y\|^2 \quad (4)$$

由 $x^i \in \mathbf{R}_+$ 和 $F^i(x) \in \mathbf{R}$,再由式(2)有

$$\frac{\partial \psi(x^i, F^i(x))}{\partial x^i} = [F^i(x)]_+^2 \geq 0$$

$$\frac{\partial \psi(x^i, F^i(x))}{\partial F^i(x)} = 2x^i [F^i(x)]_+ - 2 [-F^i(x)]_+$$

因此

$$\frac{\partial \psi(x^i, F^i(x))}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi(x^i, F^i(x))}{\partial F^i(x)} = 2x^i [F^i(x)]_+^3 - 2 [-F^i(x)]_+ [F^i(x)]_+^2 =$$

$$2x^i [F^i(x)]_+^3 \geq 0 \quad (5)$$

故由式(4)(5)得

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(x)^T d = & -\frac{\partial \psi(x, F(x))^T}{\partial a} \frac{\partial \psi(x, F(x))}{\partial b} - \frac{\partial \psi(x, F(x))^T}{\partial b} \nabla F(x) \frac{\partial \psi(x, F(x))}{\partial b} \leq \\ & -\mu \|d\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

即 d 在 $x \in \mathbf{R}_+^n$ 上是一个下降方向. 证毕.

下面给出新的非单调下降算法(NCPNMDA)的具体步骤:

Step 0 取 $x_0 \in \mathbf{R}_+^n, \omega \in (0, 1), \delta \in (0, 1), 0 \leq \eta_{\min} \leq \eta_{\max} < 1, D_0 = \Psi(x_0), \varepsilon$ 充分小, 令 $k := 0$;

Step 1 若 $\Psi(x_k) = 0$ 或者 $\Psi(x_k) < \varepsilon$, 则停, 即 x_k 是非线性互补问题的一个解, 否则转 Step 2;

Step 2 由式(3)知

$$d_k = -\frac{\partial \Psi(x_k, F(x_k))}{\partial b}, t_k = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{2F^i(x_k)} \mid x^i > 0, F^i(x_k) > 0 \right\} \quad (7)$$

转 Step 3;

Step 3 m_k 是满足式(8)的最小非负整数

$$\Psi(x_k + \omega_k^{m_k} d_k) \leq D_k + \delta \omega_k^{m_k} \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle \quad (8)$$

其中 $\omega_k = \min\{\omega, t_k\}$, 令 $\lambda_k = \omega^{m_k}$, 转 Step 4;

Step 4 $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, 转 Step 5;

Step 5 给出满足某种规则的 $\eta_k \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$, 计算

$$D_{k+1} = \eta_k D_k + (1 - \eta_k) \Psi(x_{k+1}) \quad (9)$$

$k := k+1$, 转 Step 1.

注: 当 $\eta = 0$ 时, 该算法(NCPNMDA)就退化为单调下降算法, 记为 NCPMDA.

2 收敛性分析

引理 3 $\{x_k\}$ 是算法(NCPNMDA)产生的无穷序列, 则有

(i) $\Psi(x_{k+1}) \leq D_k, \forall k$;

(ii) $\Psi(x_k) \leq D_k, \forall k$.

证明 由式(6)(8)知

$$\Psi(x_{k+1}) \leq D_k + \delta \lambda_k \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle \leq D_k - \mu \|d_k\|^2 \quad (10)$$

因此, $\Psi(x_{k+1}) \leq D_k, \forall k$.

由式(9)(10)知

$$D_{k+1} = \eta_k D_k + (1 - \eta_k) \Psi(x_{k+1}) \geq \eta_k \Psi(x_{k+1}) + (1 - \eta_k) \Psi(x_{k+1}) = \Psi(x_{k+1})$$

又由 $D_0 = \Psi(x_0)$ 知

$$\Psi(x_k) \leq D_k, \forall k$$

证毕.

引理 4 $\{x_k\}$ 是由算法(NCPNMDA)产生的无穷序列, 则 $\{D_k\}$ 单调不增且有界.

证明 由算法(NCPNMDA)的构造和引理 3 的(i)知

$$D_{k+1} = \eta_k D_k + (1 - \eta_k) \Psi(x_{k+1}) \leq \eta_k D_k + (1 - \eta_k) D_k = D_k$$

再由 $\Psi(x_k) \geq 0$ 和引理 3 的(ii)知 $\{D_k\}$ 单调不增且有界. 证毕.

定理 1^[7] 假设 F 是模为 μ 强单调的, 则水平

$$L(x_0) := \{x \mid x \in \mathbf{R}_+^n, \Psi(x) \leq \Psi(x_0)\}$$

是有界的.

引理 5 假设 F 是连续可微的, $\{t_k\}$ 是算法(NCPNMDA)产生的无穷序列, 则 $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k > 0$.

证明 如果 $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$, 由 t_k 的定义知, 至少存在一个指标 i_0 , 对 x_k 的元素有 $x_k^{i_0} > 0$ 且 $F^{i_0}(x_k) \rightarrow \infty$.

记子列为 $\{x_{k_j}\}$, 则 $\|F(x_{k_j})\| \rightarrow \infty$, 又由 F 是连续的, 有

$$\|x_{k_j}\| \rightarrow \infty, k_j \rightarrow \infty \tag{11}$$

则式(11)与定理 1 结论 x_k 有界矛盾, 故结论得证. 证毕.

定理 2 假设 $F(x)$ 是连续可微的且是模为 μ 强单调的, $\{x_k\}$ 是由算法(NCPNMDA)产生的无穷序列, 则 $\{x_k\}$ 的任一聚点是 NCP 的一个解.

证明 由引理 2 知, $x_k \in \mathbf{R}_+^n, \forall k, d_k$ 是价值函数 $\Psi(x)$ 在 x_k 处的一个下降方向, 由定理 1 知, $\{x_k\}$ 有界.

由算法(NCPNMDA)的构造和式(7)(8)得

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \eta_k D_k + (1 - \eta_k) \Psi(x_{k+1}) \leq \\ &= \eta_k D_k + (1 - \eta_k) (D_k + \delta \lambda_k \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle) = \\ &= D_k + (1 - \eta_k) (\delta \lambda_k \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle) \end{aligned}$$

即 $D_{k+1} - D_k \leq (1 - \eta_k) (\delta \lambda_k \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle)$.

由引理 2 知

$$D_{k+1} - D_k \leq - (1 - \eta_k) \mu \delta \lambda_k \|d_k\|^2$$

由引理 4 知 $\{D_k\}$ 是单调不增且有界的, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \|d_k\|^2 = 0$.

如果 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_k > 0$, 由级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k \|d_k\|^2$ 是收敛的, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| = 0$. 则由 d_k 是连续的和文献[6]的引理 2.2 知, $\{x_k\}$ 的任一聚点是 NCP 的一个解. 否则, 存在一子列 $N_0 \subseteq N = \{1, 2, 3, \dots\}$, 使得 $\lim_{\substack{k \in N_0 \\ k \rightarrow \infty}} \lambda_k = 0$.

由搜索规则知, 对 $\forall k \in N_0$, 有

$$\Psi(x_k + \omega^{-1} \lambda_k d_k) - \Psi(x_k) \geq \Psi(x_k + \omega^{-1} \lambda_k d_k) - D_k > \delta \omega^{-1} \lambda_k \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle$$

利用中值定理有

$$\langle \nabla \Psi(\xi_k), d_k \rangle > \delta \langle \nabla \Psi(x_k), d_k \rangle \tag{12}$$

其中, $\xi_k = x_k + \theta_k \omega^{-1} \lambda_k d_k, \theta_k \in (0, 1)$.

由定理 1 知, $\{x_k\}$ 有界, 则 $\{d_k\}$ 也有界. 设 $\lim_{k \in N_0, k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \lim_{k \in N_0, k \rightarrow \infty} d_k = d^*$.

由式(12)得

$$\langle \nabla \Psi(x^*), d^* \rangle > \delta \langle \nabla \Psi(x^*), d^* \rangle \tag{13}$$

由式(6)得

$$\langle \nabla \Psi(x^*), d^* \rangle \leq -\mu \|d^*\|^2 \tag{14}$$

由式(13)(14)得 $\|d^*\| = 0$, 即由文献[6]引理 2.1 知, x^* 是 NCP 的一个解. 证毕.

由定理 2 和文献[8]可以得到推论 1.

推论 1 假设 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续可微且强单调的, 则 NCP 有唯一解.

3 数值试验

运用 MATLAB 语言对本节算法编写程序, 在 ThinkPad T430 电脑上对参考文献[6][8]中的数值例子进行数值试验, 同时与单调步长的算法进行比较.

记本章算法为算法 NCPNMDA, 单调线搜索下降算法为算法 NCPMDA, 并将这两个算法的数值结果进行比较. 取 $\omega=0.5, \delta=0.85, \eta=0.3, \varepsilon < 10^{-5}$, 从任意大于 0 的初始点开始, 来验证算法的有效性. 用 x 表示初始值, 用 n 表示初始点的维数, 用 k 表示算法的迭代次数. 两个例子的 F 都是在 \mathbf{R}^n 上强单调的, 对应的 NCP 有唯一解. 在数值结果中, 迭代次数是指主算法的迭代次数.

例 1 设 $F(x) = Mx + q$, 其中

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{pmatrix}, q = (-1, \dots, -1)^T$$

表 1 给出了不同维数 n 和不同初始点 x 的数值结果, 图 1 给出了计算分析图.

表 1 例 1 的计算结果

初始点 x	维数 n		10	50	100	300	600
$x(1:n) = 5$	k	NCPNMDA	34	34	38	38	40
		NCPMDA	125	131	133	135	136
	CUP 时间/s	NCPNMDA	0.050 7	0.057 4	0.123 8	1.691 0	17.891 0
		NCPMDA	0.144 2	0.284 9	0.633 7	7.080 6	63.358 8
$x(1:n) = 15$	k	NCPNMDA	91	91	93	92	93
		NCPMDA	117	121	122	124	125
	CUP 时间/s	NCPNMDA	0.078 3	0.128 8	0.356 2	4.314 7	45.046 1
		NCPMDA	0.140 9	0.240 6	0.521 8	6.592 1	64.110 4
$x(1:n) = 20$	k	NCPNMDA	120	122	125	125	125
		NCPMDA	148	152	153	155	157
	CUP 时间/s	NCPNMDA	0.112 1	0.208 0	0.392 2	5.819 7	64.466 6
		NCPMDA	0.176 9	0.293 3	0.673 6	8.497 9	80.733 4
$x(1:n) = 30$	k	NCPNMDA	176	175	178	176	176
		NCPMDA	223	227	229	231	232
	CUP 时间/s	NCPNMDA	0.139 8	0.245 8	0.669 9	8.480 4	88.803 8
		NCPMDA	0.216 4	0.447 6	0.951 1	12.153 8	120.06

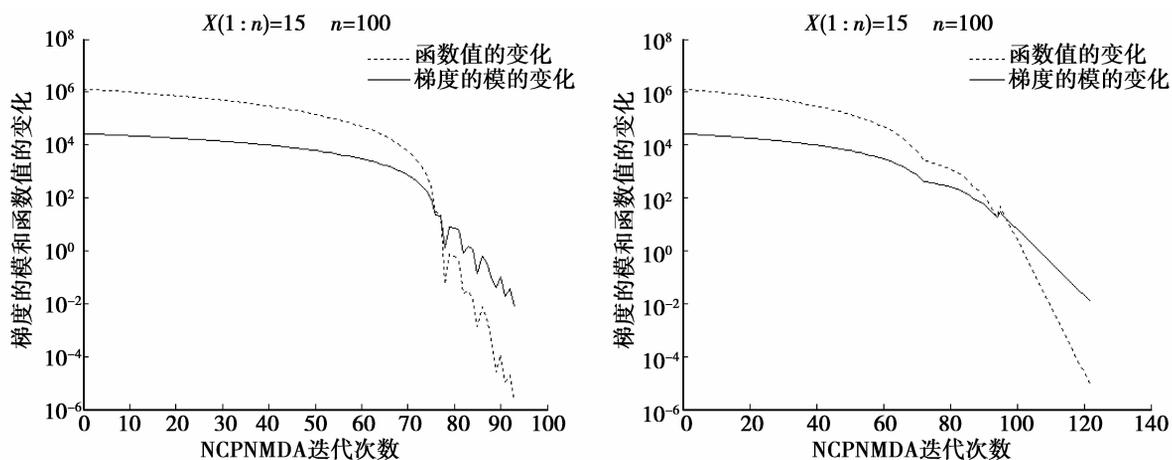


图 1 例 1 的计算分析图

例 2 设 $F(x) = Mx + q$, 其中

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ \vdots \\ -4 \end{pmatrix}$$

表 2 给出了不同维数 n 和不同初始点 x 的数值结果,图 2 给出了计算分析图.

表 2 例 2 的计算结果

初始点 x	维数 n		10	50	100	500	1 000
$x(1:n) = 0.5$	k	NCPNMDA	18	20	21	23	24
		NCPMDA	35	40	43	48	49
	CUP	NCPNMDA	0.050 0	0.078 2	0.124 4	5.709 6	50.205 1
	时间/s	NCPMDA	0.079 1	0.152 2	0.281 9	13.128 7	107.41
$x(1:n) = 1$	k	NCPNMDA	17	18	19	21	23
		NCPMDA	30	37	39	43	45
	CUP	NCPNMDA	0.048 8	0.070 5	0.118 2	5.492 2	47.593 6
	时间/s	NCPMDA	0.067 4	0.142 6	0.250 6	11.933 0	98.512 1
$x(1:n) = 2$	k	NCPNMDA	21	23	23	25	26
		NCPMDA	54	86	88	89	91
	CUP	NCPNMDA	0.050 6	0.076 3	0.124 3	6.379 9	54.551 4
	时间/s	NCPMDA	0.098 0	0.328 4	0.602 7	26.352 7	217.90
$x(1:n) = 3$	k	NCPNMDA	29	31	32	33	34
		NCPMDA	68	75	77	81	83
	CUP	NCPNMDA	0.061 3	0.102 0	0.166 2	11.545 5	91.595 2
	时间/s	NCPMDA	0.106 8	0.186 6	0.422 7	23.569 5	193.04

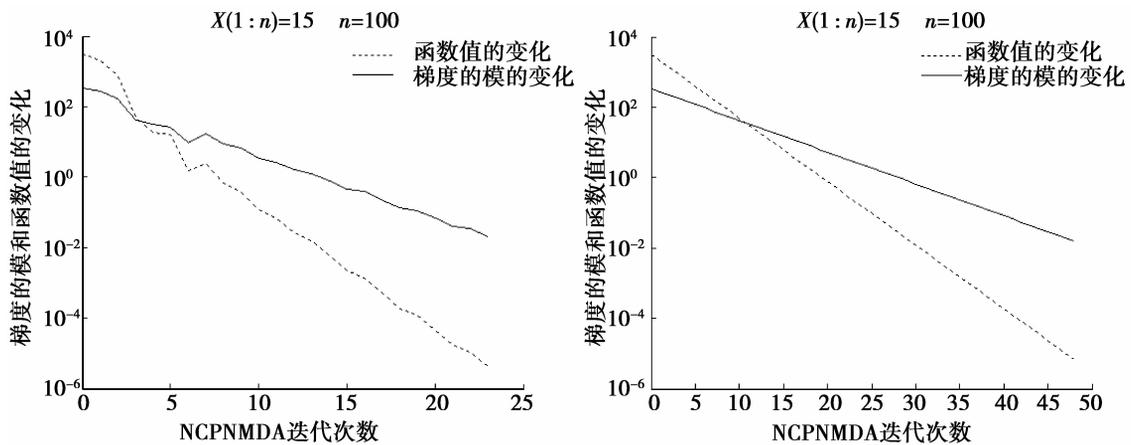


图 2 例 2 的计算分析图

通过上述数值例子的计算结果可以看出,从低维到高维,再到初始点的取值,新算法(NCPNMDA)都能快速有效地求得最优解,并且具有良好的稳定性;无论从迭代次数还是运行时间都远远少于单调算法(NCPMDA).因此,新算法(NCPNMDA)是有效的,适合求解中大规模问题.

参考文献:

- [1] TANG J Y, DONG L. A New Class of Non-monotone Memory Gradient Method and Its Global Convergence[J]. Mathematical Theory and Applications, 2009, 29(2):5-8
- [2] 乌彩英,陈国庆. 大规模非线性互补问题的共轭梯度法[J]. 数学的实践与认识,2012,42(3):185-193
- [3] GU N Z, MO J T. Incorporating Nonmonotone Strategies Into the Trust Region Method for Unconstrained Optimization[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 55(9):2158-2172
- [4] GRIPPO L, LAMPARIELLO F, LUCIDI S. A Nonmonotone Line Search Technique for Newton's Method [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1986, 23(4):707-716
- [5] ZHANG H C, HAGER W W. A Non-monotone Line Search Technique and Its Application to Unconstrained Optimization [J]. SIAM Journal on Optimization, 2004, 14(4):1043-1056
- [6] SOLODOV M V. Stationary Points of Bounded Constrained Minimization Reformulations of Complementarity Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 94(2):449-467
- [7] WANG Y J, WANG C Y. A Descent Algorithm for Solving Nonlinear Complementarity Problem[J]. Or Transactions, 2004(5):60-66
- [8] GEIGER C, KANZOW C. On the Resolution of Monotone Complementarity Problems [J]. Computational Optimization and Applications, 1996, 2(5):155-173

Non-monotone Algorithm for the Solution to Nonlinear Complementarity Problems

HOU Chun-li¹, WANG Xuan-zhan²

- (1. Department of Mathematical and Physical Science, Zibo Normal College, Shandong Zibo 255130, China;
2. School of Science, China Petroleum University (East China), Shandong Qingdao 266580, China)

Abstract: Value function is used to equivalently transform nonlinear complementarity problems into the optimality problems with non-negative constraints, the non-monotone descent algorithm for new solution to nonlinear complementarity problems is proposed based on new non-monotone search technique of Gu N.Z., the global convergence of this algorithm is proved under the proper condition, and the validity of this algorithm is tested by numerical examples.

Key words: complementarity problem; value function; non-monotone technique; global convergence

责任编辑:李翠薇