文章编号:1672-058X(2014)11-0004-06

一类非线性退化时滞微分系统的一致稳定性*

陈爱珍, 周宗福**
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘　要:研究一类非线性退化时滞微分方程的一致稳定性问题,利用拉什密辛型定理,结合一些分析的技巧,得到了其零解一致稳定的若干充分条件.

关键词:退化时滞微分方程;非线性;拉什密辛型定理;一致稳定性
中图分类号:O175　　　　**文献标志码**:A

0　引　言

微分系统的稳定性一直是微分方程领域的一个重要研究课题.近年来,有关退化时滞系统稳定性问题已引起许多学者的兴趣,取得了一定的成果.文献[1]根据退化系统特点提出了退化时滞微分系统解的“q”稳定概念,文献[3]利用退化时滞系统的拉什密辛型定理讨论了线性退化时滞微分系统解的稳定性,给出了零解稳定的一个判定定理.

在上述文献基础上,研究如下的一类非线性退化时滞微分系统的一致稳定性:

$$\bar{E}(t)\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{B}(t)\bar{x}(t-\tau)+\bar{f}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\tau)) \tag{1}$$

$$\bar{x}_{t_0}=\psi,\psi\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n) \tag{2}$$

其中 $\bar{x}(t)\in\mathbf{R}^n$,$t_0\geqslant 0$,$\bar{E}(t)$,$\bar{A}(t)$,$\bar{B}(t)\in C([0,+\infty],\mathbf{R}^{n\times n})$,$\bar{f}(t,x,y)\in C([0,+\infty]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$,$\bar{f}(t,0,0)=0$,$\tau\in\mathbf{R}^+$为常数,矩阵对$[E(t),A(t)]$全局指标为 1[4].利用拉什密辛型定理并结合一些分析技巧讨论了方程(1)的一致稳定性,给出了方程(1)零解一致稳定的若干充分条件.

1　预备知识

在方程(1)中,由于矩阵对$[E(t),A(t)]$全局指标为 1,由文献[4],存在 $\bar{P}(t)\in C'([0,+\infty],\mathbf{R}^{n\times n})$,$\bar{Q}(t)\in C([0,+\infty],\mathbf{R}^{n\times n})$,且 $\bar{P}(t)$,$\bar{Q}(t)$均可逆,使得

$$\bar{Q}(t)\bar{E}(t)\bar{P}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\bar{Q}(t)\bar{A}(t)\bar{P}(t)-\bar{Q}(t)\bar{E}(t)\dot{\bar{P}}(t)=\begin{bmatrix}A_1(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}$$

收稿日期:2014-04-08;修回日期:2014-05-08.
* 基金项目:安徽省自然科学基金(1208085MA13);安徽大学大学生科研训练计划项目.
** 作者简介:陈爱珍(1990-),男,安徽安庆人,从事泛函微分方程的研究.
通讯作者:周宗福(1964-),男,安徽合肥人,教授,从事泛函微分方程的研究.E-mail:zhouzf12@ 126.com.

其中 $\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2$ 分别为 n_1 阶及 $n-n_1$ 阶单位阵,$A_1(t)\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$,$n_1$ 与 t 无关.

对于系统(1)(2),作变换 $\bar{x}(t)=\bar{P}(t)x(t),t\in[-\tau,+\infty)$,当 $t\in[-\tau,0]$时,令 $\bar{P}(t)=\bar{P}(0)$,同时两边左乘 $\bar{Q}(t)$,方程(1)即被化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_1(t)x_1(t)+B_{11}(t)x_1(t-\tau)+B_{12}(t)x_2(t-\tau)+f_1(t,x(t),x(t-\tau))\\ 0=x_2(t)+B_{21}(t)x_1(t-\tau)+B_{22}(t)x_2(t-\tau)+f_2(t,x(t),x(t-\tau))\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=x(t),\quad \begin{bmatrix}B_{11}(t) & B_{12}(t)\\ B_{21}(t) & B_{22}(t)\end{bmatrix}=\bar{Q}(t)\bar{B}(t)\bar{P}(t-\tau)$$

$$\begin{bmatrix}f_1(t,x(t),x(t-\tau))\\ f_2(t,x(t),x(t-\tau))\end{bmatrix}=\bar{Q}(t)\bar{f}(t,\bar{P}(t)x(t),\bar{P}(t-\tau)x(t-\tau))$$

初始条件(2)变为

$$x_{t_0}=\varphi,\varphi(\theta)=x(t_0+\theta)=\bar{P}^{-1}(t_0+\theta)\bar{x}(t_0+\theta)=\bar{P}^{-1}(t_0+\theta)\psi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\tag{4}$$

研究思路是先研究系统(3)(4)的一致稳定性,然后得到系统(1)(2)的一致稳定性.

下面引进退化时滞微分系统解的稳定性的有关概念.考虑退化时滞微分方程

$$\boldsymbol{E}\dot{x}(t)=f(t,x_t)\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 奇异常数矩阵,$t\geqslant t_0\geqslant0,\tau>0,x(t)\in\mathbf{R}^n,x_t(\theta)=x(t+\theta)(\theta\in[-\tau,0]),f(t,\psi):[0,+\infty)\times H\to\mathbf{R}^n$,$H$ 为 $C([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$中一开集,$f$ 连续,$f(t,0)=0$,方程(5)的初始条件为

$$x_{t_0}=\varphi,\varphi\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n)\tag{6}$$

令 $T_k=[0,+\infty)$,设 $q(t,x)$为 m 维连续向量函数,在$[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$ 上有定义,且 $q(t,0)\equiv0,\forall t\in[0,+\infty)$.又设 $S_k(t_0,t_k)$为使得方程至少在$[t_0,t_k)$上有连续解的所有相容初始函数的全体,$B(0,\delta)=\{\varphi\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n):\|\varphi\|<\delta,\delta>0\}$.若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,定义 $\|x\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$,$\varphi$ 的模定义为 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]}\|\varphi(\theta)\|$.

定义 1　(i) 若 $\forall t_0\in T_k,\forall\varepsilon>0$,总存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$,使得 $\forall\varphi\in B(0,\delta)\cap S_k(t_0,t_k)$,方程(5)过初始条件$(t_0,\varphi)$的解 $x(t)=x(t,t_0,\varphi)$满足 $\|q(t,x(t))\|<\varepsilon,\forall t\in[t_0,t_k)$,则称方程(5)的零解关于$\{q(t,x),T_k\}$为稳定的.

(ii) 若在(i)中,δ 仅与 ε 有关,与 t_0 无关,则称方程(5)的零解关于$\{q(t,x),T_k\}$为一致稳定的.

下面给出拉什密辛型定理(Razumikhin theorem).

引理 1[2]　若存在连续可微的 V 函数 $V(t,y):[0,+\infty)\times D\to\mathbf{R}^+$($D$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中一个开集),及函数 $\varphi_1(s),\varphi_2(s):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$,$\varphi_1(0)=0,\varphi_2(0)=0$,$\varphi_1(s),\varphi_2(s)$在 $\mathbf{R}^+$上连续且严格单调递增,满足

1) $\varphi_1(\|q(t,x)\|)\leqslant V(t,q(t,x))\leqslant\varphi_2(\|x\|)$;

2) 存在 $\lambda\geqslant1,\forall t_0\in T_k,\forall\varphi\in S_k(t_0,t_k)$,当 $V(t,q(t,x(t,t_0,\varphi)))\geqslant\lambda(\|\varphi\|)^2$ 且 $V(t,q(t,x(t,t_0,\varphi)))\geqslant V(\alpha,q(\alpha,x(\alpha,t_0,\varphi))),\forall\alpha\in[t_0,t)$成立时,有 $\dot{V}(t,q(t,x(t,t_0,\varphi)))\leqslant0$,则方程(5)的零解关于$\{q(t,x),T_k\}$为一致稳定的.

2　主要结果

定理 1　对于方程(3),若以下条件满足

1) $\exists M>0,\|B_{21}(t)\|\leqslant M,\forall t\geqslant0$;

2) $\exists q_0: 0<q_0<1$, $\|B_{22}(t)\| \leqslant q_0$, $\forall t \geqslant 0$;

3) $\exists l_1>0, 0<l_2<\dfrac{1-q_0}{2}$,使得 $\|f_1(t,x,y)\| \leqslant l_1(\|x\|+\|y\|)$, $\|f_2(t,x,y)\| \leqslant l_2(\|x\|+\|y\|)$, $\forall t \geqslant 0$, $\forall x,y \in \mathbf{R}^n$;

4) $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{A_1^{\mathrm{T}}(t)+A_1(t)}{2}+\left[\|B_{11}(t)\|+\left(\dfrac{M+2l_2}{1-q_0-2l_2}+\dfrac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\|B_{12}(t)\|+2l_1\left(\dfrac{M+1-q_0}{1-q_0-2l_2}+\dfrac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\right] I \leqslant 0$,则方程(3)的零解关于$\{px_1^{\mathrm{T}}x_1, [0,+\infty)\}$为一致稳定的($p>0$ 为常数).

证明 令 $q(t,x)=px_1^{\mathrm{T}}x_1$, $V(t,y)=y(t,y\in\mathbf{R}^+)$, $\varphi_1(s)=\dfrac{1}{2}s$, $\varphi_2(s)=ps^2$, $s\in[0,+\infty)$,显然,引理 1 中的条件 1)满足.下面验证引理 1 的条件 2).令引理 1 中的 $\lambda=1$,由方程(3)的第 2 式,结合定理 1 的假设,通过递推,可得

$$
\begin{aligned}
\|x_2(t)\| \leqslant\ & \|B_{21}(t)\| \cdot \|x_1(t-\tau)\| + \|B_{22}(t)\| \cdot \|x_2(t-\tau)\| + \|f_2(t,x(t),x(t-\tau))\| \leqslant \\
& \|B_{21}(t)\| \cdot \|x_1(t-\tau)\| + \|B_{22}(t)\| \cdot \|x_2(t-\tau)\| + l_2(\|x(t)\| + \|x(t-\tau)\|) \leqslant \\
& \|B_{21}(t)\| \cdot \|x_1(t-\tau)\| + \|B_{22}(t)\| \cdot \|x_2(t-\tau)\| + l_2(\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| + \\
& \|x_1(t-\tau)\| + \|x_2(t-\tau)\|)
\end{aligned}
$$

从而

$$
(1-l_2)\|x_2(t)\| \leqslant (\|B_{21}(t)\|+l_2)\|x_1(t-\tau)\| + (\|B_{22}(t)\|+l_2)\|x_2(t-\tau)\| + l_2\|x_1(t)\|
$$

即有

$$
\begin{aligned}
\|x_2(t)\| \leqslant\ & \frac{\|B_{21}(t)\|+l_2}{1-l_2}\|x_1(t-\tau)\| + \frac{\|B_{22}(t)\|+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-\tau)\| + \frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| \leqslant \\
& \frac{M+l_2}{1-l_2}\|x_1(t-\tau)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-\tau)\| + \frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| \leqslant \\
& \frac{M+2l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-\tau)\| \leqslant \\
& \frac{M+2l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\left(\frac{M+2l_2}{1-l_2}\|x_1(t-\tau)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-2\tau)\|\right) \leqslant \\
& \frac{M+2l_2}{1-l_2}\left[\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\|\right] + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^2\|x_2(t-2\tau)\|
\end{aligned}
$$

一直递推下去,必存在 k 使得 $t-k\tau\in[t_0-\tau,t_0]$,从而可得

$$
\begin{aligned}
\|x_2(t)\| \leqslant\ & \frac{M+2l_2}{1-l_2}\left[\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \cdots + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}\|x_1(t)\|\right] + \\
& \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\|x_2(t-(k-1)\tau)\| \leqslant \\
& \frac{M+2l_2}{1-l_2}\left[\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \cdots + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}\|x_1(t)\|\right] + \\
& \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\left(\frac{M+l_2}{1-l_2}\|x_1(t-k\tau)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-k\tau)\| + \frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t-(k-1)\tau)\|\right) \leqslant \\
& \frac{M+2l_2}{1-l_2}\left[\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \cdots + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}\|x_1(t)\| + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\|x_1(t)\|\right] +
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\left[\frac{M+l_2}{1-l_2}\|\varphi\|+\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\|\varphi\|\right]\leqslant$$

$$\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}\|x_1(t)\|+\frac{M+1}{1-l_2}\|\varphi\|\leqslant$$

$$\left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\|x_1(t)\|$$

进一步地,有

$$\|x_2(t-\tau)\|\leqslant\left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\|x_1(t)\|\ (t\geqslant t_0)$$

$$\begin{aligned}\dot V(t,q(t,x(t,t_0,\varphi)))=\dot q(t,x(t,t_0,\varphi))=&px_1^{\mathrm T}(t)\dot x_1(t)+p\dot x_1^{\mathrm T}x_1(t)=2px_1^{\mathrm T}(t)\dot x_1(t)=\\&2px_1^{\mathrm T}(t)[A_1(t)x_1(t)+B_{11}(t)x_1(t-\tau)+B_{12}(t)x_2(t-\tau)+f_1(t,x(t),x(t-\tau))]=\\&2p[x_1^{\mathrm T}(t)A_1(t)x_1(t)+x_1^{\mathrm T}(t)B_{11}(t)x_1(t-\tau)+x_1^{\mathrm T}(t)B_{12}(t)x_2(t-\tau)+\\&x_1^{\mathrm T}(t)f_1(t,x(t),x(t-\tau))]\leqslant\\&2p[x_1^{\mathrm T}(t)A_1(t)x_1(t)+\|x_1(t)\|\cdot\|B_{11}(t)\|\cdot\|x_1(t-\tau)\|+\\&\|x_1(t)\|\cdot\|B_{12}(t)\|\cdot\|x_2(t-\tau)\|+\|x_1(t)\|\cdot\|f_1(t,x(t),x(t-\tau))\|]\leqslant\\&2p\{x_1^{\mathrm T}(t)A_1(t)x_1(t)+\|x_1(t)\|\cdot\|B_{11}(t)\|\cdot\|x_1(t)\|+\|x_1(t)\|\cdot\\&\|B_{12}(t)\|\cdot\left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\|x_1(t)\|+\\&\|x_1(t)\|\cdot l_1(\|x_1(t)\|+\|x_1(t-\tau)\|+\|x_2(t)\|+\|x_2(t-\tau)\|)\}\leqslant\\&2p\{x_1^{\mathrm T}(t)A_1(t)x_1(t)+\|x_1(t)\|\cdot[\|B_{11}(t)\|+(\|B_{12}(t)\|+2l_1)\cdot\\&\left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)+2l_1\Big]\cdot\|x_1(t)\|\}\leqslant\\&2px_1^{\mathrm T}(t)\left\{\frac{A_1^{\mathrm T}(t)+A_1(t)}{2}+\left[\|B_{11}(t)\|+\left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\cdot\right.\right.\\&\left.\left.\|B_{12}(t)\|+2l_1\left(\frac{M+1-q_0}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\right]\cdot I\right\}x_1(t)\leqslant 0\end{aligned}$$

从而引理 1 中的条件 2)满足.

于是,由引理 1 可知,方程(3)的零解关于$\{px_1^{\mathrm T}x_1,[0,+\infty)\}$为一致稳定的.定理 1 证毕.

定理 2　在定理 1 的条件下,方程(3)的零解关于$\{x,[0,+\infty)\}$为一致稳定的.

证明　由定理 1 知,方程(3)的零解关于$\{px_1^{\mathrm T}x_1,[0,+\infty)\}$为一致稳定的,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta\in(0,\varepsilon)$,使得$\forall\varphi\in B(0,\delta)\cap S_k(t_0,+\infty)$,$\|q(t,x(t))\|=px_1^{\mathrm T}(t)x_1(t)<p\varepsilon^2$,即$\|x_1(t)\|<\varepsilon$,对$\forall t\in[t_0,+\infty)$成立.由方程(3)可知,对$\forall t\in[t_0,+\infty)$有

$$\begin{aligned}\|x_2(t)\|\leqslant&\|B_{21}(t)\|\cdot\|x_1(t-\tau)\|+\|B_{22}(t)\|\cdot\|x_2(t-\tau)\|+\|f_2(t,x(t),x(t-\tau))\|\leqslant\\&\|B_{21}(t)\|\cdot\|x_1(t-\tau)\|+\|B_{22}(t)\|\cdot\|x_2(t-\tau)\|+l_2(\|x(t)\|+\|x(t-\tau)\|)\end{aligned}$$

从而

$$\|x_2(t)\|\leqslant\frac{\|B_{21}(t)\|+l_2}{1-l_2}\|x_1(t-\tau)\|+\frac{\|B_{22}(t)\|+l_2}{1-l_2}\|x_2(t-\tau)\|+\frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\|\leqslant$$

$$\frac{\mathrm{M}+2l_2}{1-l_2}\|x_1(t)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\left(\frac{M+l_2}{1-l_2}\right)\cdot\|x_1(t-2\tau)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\cdot\|x_2(t-2\tau)\| +$$

$$\frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t-\tau)\|) \leqslant$$

$$\frac{\mathrm{M}+2l_2}{1-l_2}\varepsilon + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\left(\frac{M+2l_2}{1-l_2}\right)\varepsilon + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^2\cdot\|x_2(t-2\tau)\|$$

如此递推下去,必存在 k,使得 $t-k\tau\in[t_0-\tau,t_0]$,从而可得

$$\|x_2(t)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}+2l_2}{1-l_2}\varepsilon + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\left(\frac{M+2l_2}{1-l_2}\right)\varepsilon + \cdots + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}\left(\frac{M+2l_2}{1-l_2}\right)\varepsilon + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\cdot$$

$$\|x_2(t-(k-1)\tau)\| \leqslant$$

$$\frac{\mathrm{M}+2l_2}{1-l_2}\varepsilon\left(1+\frac{q_0+l_2}{1-l_2}+\cdots+\left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}\right) + \left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\cdot$$

$$\left(\frac{M+l_2}{1-l_2}\cdot\|x_1(t-k\tau)\| + \frac{q_0+l_2}{1-l_2}\cdot\|x_2(t-k\tau)\| + \frac{l_2}{1-l_2}\|x_1(t-(k-1)\tau)\|\right) \leqslant$$

$$\frac{\mathrm{M}+2l_2}{1-l_2}\varepsilon\left(1+\frac{q_0+l_2}{1-l_2}+\cdots+\left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-2}+\left(\frac{q_0+l_2}{1-l_2}\right)^{k-1}\right) + \frac{M+1}{1-l_2}\|\varphi\| \leqslant$$

$$\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}\varepsilon + \frac{M+1}{1-l_2}\cdot\sqrt{p}\,\varepsilon = \left(\frac{M+2l_2}{1-(q_0+2l_2)}+\frac{M+1}{1-l_2}\sqrt{p}\right)\varepsilon$$

因此,方程(3)的零解关于$\{x,[0,+\infty)\}$为一致稳定的.证毕.

设 $Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称阵,用 $\lambda_{\min}(Q)$ 表示 Q 的最小特征值.

定理3 若方程(3)的零解是一致稳定的(即关于$\{x,[0,+\infty)\}$一致稳定),又设 $\bar{P}(t)$ 在$[0,+\infty)$上有界,且 $\lambda_{\min}(\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}(t))\geqslant\mu>0(\forall t\geqslant 0)$,则方程(1)的零解关于$\{x,[0,+\infty)\}$是一致稳定的.

证明 首先,若 $x(t)$ 为式(3)(4)在$[t_0-\tau,+\infty)$上的唯一连续解,则 $\bar{x}(t)=\bar{P}(t)x(t)$ 为式(1)(2)在$[t_0-\tau,+\infty)$的唯一连续解.

又由于 $\bar{P}(t)$ 在$[0,+\infty)$上有界,故$\exists M>0$,使得 $\|\bar{P}(t)\|\leqslant M$,$\forall t\geqslant 0$.因为方程(3)的零解是一致稳定的,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,$\forall\varphi\in B(0,\delta)\cap S_k(t_0,+\infty)$,有 $\|x(t,t_0,\varphi)\|<\varepsilon$,对$\forall t\geqslant t_0$ 成立.对上述的 $\varepsilon>0$,取 $\bar{\delta}(\varepsilon)=\sqrt{\mu}\delta>0$,则$\forall\psi\in B(0,\bar{\delta})\cap\bar{S}_k(t_0,+\infty)$,其中 $\bar{S}_k(t_0,+\infty)=\{\bar{P}(t_0)\varphi\mid\varphi\in S_k(t_0,+\infty)\}$,有 $\|\psi\|<\bar{\delta}$,即 $\|\bar{P}(t_0)\varphi(\theta)\|<\bar{\delta}(\forall\theta\in[-\tau,0])$,从而

$$\|\bar{P}(t_0)\varphi(\theta)\|^2=\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)(\bar{P}^{\mathrm{T}}(t_0)\bar{P}(t_0))\varphi(\theta) < (\bar{\delta})^2=\mu\delta^2$$

又由于

$$\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)(\bar{P}^{\mathrm{T}}(t_0)\bar{P}(t_0))\varphi(\theta) \geqslant \lambda_{\min}(\bar{P}^{\mathrm{T}}(t_0)\bar{P}(t_0))\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\varphi(\theta) \geqslant \mu\|\varphi(\theta)\|^2$$

故 $\mu\cdot\|\varphi(\theta)\|^2<\mu\delta^2$,所以 $\|\varphi(\theta)\|<\delta$,$\forall\theta\in[-\tau,0]$,因此 $\|\varphi\|<\delta$,故有 $\|\bar{x}(t,t_0,\psi)\|=\|\bar{P}(t)x(t,t_0,\varphi)\|\leqslant\|\bar{P}(t)\|\cdot\|x(t,t_0,\varphi)\|\leqslant M\cdot\|x(t,t_0,\varphi)\|<M\varepsilon$,$\forall t\geqslant t_0$ 成立.

从而方程(1)的零解关于$\{x,[0,+\infty)\}$是一致稳定的.证毕.

参考文献:

[1] 李远清,刘永清.广义泛函微分方程解的稳定性[J].应用数学学报,1999,22(1):130-138

[2] 李远清,刘永清,陆以勤.一类滞后时变广义微分系统稳定性的拉什密辛型定理[J].控制理论与应用,1999,16(2):235-237

[3] 韩仁基,蒋威.变系数退化时滞微分系统解的稳定性[J].数学研究,2008,41(4):401-406

[4] MARZ R. Some New Results Concerning Index-3 Differential-algebraic Equations[J]. J Math Anal Appl,1989,140(1):177-179

Uniform Stability of a Class of Nonlinear Degenerate Differential System with Delay

CHEN Ai-zhen, ZHOU Zong-fu

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: This paper studies the uniform stability of a class of nonlinear degenerate differential equation with delay and obtains several sufficient conditions for its uniform stability of zero solution by using Razumikhin Theorem and by combining some analysis skills.

Key words: degenerate differential equation with delay; nonlinearity; Razumikhin Theorem; uniform stability

责任编辑:李翠薇

(上接第 3 页)

参考文献:

[1] LALITHA C S, METHA M. A Note on Pseudolinearity in Terms of Bifunctions [J]. Asia-Pac Oper Res, 2007(24):1-9

[2] ANSARI Q H, SCHAIBLE S, Yao J C. Y-pseudolinearity [J]. Riv Math Sci Econ Soc, 1999(22):31-39

[3] ANSARI Q H, REZAEI M. Invariant Pseudolinearity with Applications [J]. Optim Theory Appl, 2012(153):587-601

[4] 胡毓达. 多目标规划有效性理论 [M].上海:上海科学技术出版社,1994

The Invariant Pseudo-linearity of Vector Functions and Its Application

YANG Jie, HUANG Long-guang

(School of Science, Jimei University, Fujian Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper uses Dini directional derivatives to discuss vector invariant h-pseudo-linear functions and gives the properties of several non-differentiable and invariant pseudo-linear equation solution set by semi-order method.

Key words: directional derivative; pseudo-linearity; semi-order

责任编辑:李翠薇