文章编号:1672-058X(2013)08-0015-04

一个新的光滑低阶精确罚函数

张 霞
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:对不等式约束优化问题提出了一种新的低阶精确罚函数的构造,使其转化为易求解的无约束优化问题;给出了光滑罚问题与非光滑罚问题,光滑罚问题与原问题的目标函数值之间的误差估计,并且在弱的假设条件下证明了光滑罚问题的全局最优解是原问题的近似最优解.

关键词:约束优化问题;精确罚函数;光滑化

中图分类号:O211.2 **文献标志码**:A

1 问题的提出

考虑下列不等式约束非线性规划问题(P)

$$\min f(x),\text{s.t.}\quad g(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m \tag{P}$$

其中 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $g_i(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,m$ 是连续可微函数.

对于问题(P),常用的罚函数是 l_1 罚函数:$f_\beta(x)=f(x)+\beta\sum_{i=1}^m g_i^+(x)$,其中,$\beta>0$ 是罚因子.l_1 罚函数不仅形式简单,而且还是精确罚函数,即在一定条件下,存在正数 $\beta^*>0$,使得罚因子 $\beta>\beta^*$ 时,问题(P)的局部最小解也是罚函数 $f_\beta(x)$ 的局部最小解[1].文献[2-3]对问题(P)讨论了低阶罚函数,如下:

$$\varphi_{\beta,v}(x)=f(x)+\beta\sum_{i=1}^m p_v(g_i(x)) \tag{1}$$

其中 $p_v(u)=(\max\{0,u\})^v$,$0<v<1$ 表示低阶罚函数的阶数.

对应(P)的优化问题(P_β)为:

$$\min \varphi_{\beta,v}(x) \tag{P_β}$$

一般的精确罚函数并不光滑,文献[3]讨论了将(1)ε 光滑化,并提出了修正的精确罚函数,文献[4]引进了光滑的低阶罚函数.此处将对问题(P)引入一种新的光滑低阶精确罚函数的构造,并证明它的一些定理和性质.

2 二阶光滑罚函数的构造

令 $p_{\varepsilon,v}(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ \dfrac{u^{v+2}}{\varepsilon^2}-\dfrac{u^{v+3}}{2\varepsilon^3} & 0\leqslant u\\ u^v-\dfrac{1}{2}\varepsilon u^{v-1} & u\geqslant\varepsilon<\varepsilon\end{cases}$,其中 $v\in(0,1)$,$\varepsilon>0$.

收稿日期:2013-03-08;**修回日期**:2013-04-07.

作者简介:张霞(1987-),女,重庆长寿人,硕士研究生,从事最优化理论与算法研究.

对于问题(P),研究下面的罚函数:

$$\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)=f(x)+\beta\sum_{i=1}^{m}p_{\varepsilon,v}(g_i(x)) \tag{2}$$

问题(P)对应的优化问题(PI_β)定义为 $\min\ \varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)$.

3 低阶光滑罚函数 $\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)$ 的性质

定义1[3] 设 f^* 是问题(P)的最优目标函数值,如果点 x_ε 对问题(P)是可行的,并且对任意的 $\varepsilon>0$ 满足 $|f^*-f(x_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$,则称 x_ε 为问题(P)的一个 ε 近似最优解.

定义2 如果对任意的一个 $\bar{y}\in\mathbf{R}^n$,满足

$$\nabla f(\bar{x})+\sum_{i\in I}\bar{y}_i\nabla g_i(\bar{x})=0 \tag{3}$$

$$\bar{y}_i g_i(\bar{x})=0,\bar{y}_i\geqslant 0,g_i(\bar{x})\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m \tag{4}$$

就称 $\bar{y}$ 为对应 $\bar{x}$ 的一个 Lagrange 乘子.

引理1[3] 设 x^* 是原问题(P)的局部最小解,λ^* 是对应的 Lagrange 乘子,如果(x^*,λ^*)满足二阶充分性条件,则对任意的 $0<v<1,\beta>0$,x^* 必是低阶罚函数 $\varphi_{\beta,v}(x)$ 的局部严格最优解.

由引理1,容易得到低阶罚函数 $\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)$ 的局部精确罚性质.

定理1 对 $\forall v\in(0,1),\varepsilon>0$,有

(1) $p_{\varepsilon,v}(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至少二次连续可微.

(2) 对 $\forall u\in\mathbf{R},p_v(u)\geqslant p_{\varepsilon,v}(u)$.

(3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}p_{\varepsilon,v}(u)=p_v(u)$.

证明 (1)可由二次连续可微的定义得出.

(2)对 $\forall u\in\mathbf{R}$,有

$$p_v(u)-p_{\varepsilon,v}(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ u^v(1-\dfrac{u^2}{\varepsilon_2})+\dfrac{u^{v+3}}{2\varepsilon^3}\geqslant\dfrac{\varepsilon^v}{2} & 0\leqslant u<\varepsilon\\ \dfrac{1}{2}\varepsilon u^{v-1} & u\geqslant\varepsilon\end{cases}$$

所以对 $\forall u\in\mathbf{R},p_v(u)\geqslant p_{\varepsilon,v}(u)$.

$$(3)\ \lim_{\varepsilon\to 0}p_{\varepsilon,v}(u)=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}0=0=p_v(u) & u<0\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\dfrac{u^{v+2}}{\varepsilon^2}-\dfrac{u^{v+3}}{2\varepsilon^3})=0=p_v(u) & 0\leqslant u<\varepsilon\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(u^v-\dfrac{1}{2}\varepsilon u^{v-1})=u^v=p_v(u) & u\geqslant\varepsilon\end{cases}$$

证毕.

定理2 对 $\forall x\in\mathbf{R}^n,\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)=\varphi_{\beta,v}(x)$.

证明 对 $\forall x\in\mathbf{R}^n,i\in I$,由 $p_v(u)$ 和 $p_{\varepsilon,v}(u)$ 的定义得

$$p_v(g_i(x))-p_{\varepsilon,v}(g_i(x))=\begin{cases}0,g_i(x)<0\\ 0\leqslant(g_i(x))^v-\dfrac{(g_i(x))^{v+2}}{\varepsilon^2}+\dfrac{(g_i(x))^{v+3}}{2\varepsilon^3}\leqslant\dfrac{3\varepsilon^v}{2},0\leqslant g_i(x)<\varepsilon\\ 0<\dfrac{1}{2}\varepsilon(g_i(x))^{v-1}\leqslant\dfrac{\varepsilon^v}{2},g_i(x)\geqslant\varepsilon\end{cases}$$

即 $0\leqslant p_v(g_i(x))-p_{\varepsilon,v}(g_i(x))\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon^v, i\in I$

$$0\leqslant\beta\sum_{i\in I}p_v(g_i(x))-\beta\sum_{i\in I}p_{\varepsilon,v}(g_i(x))\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v$$

所以 $0\leqslant\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)-\varphi_{\beta,v}(x)\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v$,因此 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)=\varphi_{\beta,v}(x)$,证毕.

定理 2 说明了 $\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)$ 和 $\varphi_{\beta,v}(x)$ 的误差可以任意小,只要光滑参数 ε 足够小.

推论 1　设 $\{\varepsilon_k\}\to0$ 是一个正序列,对任意给定的 $\beta>0, v\in(0,1)$,设 x^k 是 $\min\ \varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x)$ 的一个解,$\bar{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的一个聚点,则 $\bar{x}$ 是 $\min\ \varphi_{\beta,v}(x)$ 的一个最优解.

定理 3　设 x^* 是问题(P_β)的一个最优解,任意给定的 $\beta>0$ 是问题(PI_β)的一个最优解,对任意的 $\beta>0$, $\varepsilon>0$,有 $f(\bar{x})\leqslant f(x^*)+\frac{3}{2}\beta\varepsilon^v$,即 $\bar{x}$ 是问题(P_β)的一个近似最优解.

证明　由定理 2 得:

$$0\leqslant\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x^*)-\varphi_{\beta,v}(x^*)\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v, 0\leqslant\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(\bar{x})-\varphi_{\beta,v}(\bar{x})\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v$$

由假设条件知:$\varphi_{\beta,v}(x^*)\leqslant\varphi_{\beta,v}(\bar{x}), \varphi_{\beta,\varepsilon,v}(\bar{x})\leqslant\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x^*)$,因此

$$0\leqslant\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x^*)-\varphi_{\beta,v}(x^*)\leqslant\varphi_{\beta,v}(x^*)-\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(\bar{x})\leqslant\varphi_{\beta,v}(\bar{x})-\varphi_{\beta,\varepsilon,v}(\bar{x})\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v$$

所以 $0\leqslant f(x^*)+\beta\sum_{i=1}^{m}p_v(g_i(x^*))-[f(\bar{x})+\beta\sum_{i=1}^{m}p_{\varepsilon,v}(g_i(\bar{x}))]\leqslant\frac{3}{2}m\beta\varepsilon^v$.

假设 x^* 和 $\bar{x}$ 对问题(P)是可行的,则 $\sum_{i=1}^{m}p_v(g_i(x^*))=\sum_{i=1}^{m}p_{\varepsilon,v}(g_i(\bar{x}))=0$,因此 $f(\bar{x})\leqslant f(x^*)+\frac{3}{2}\beta\varepsilon^v$,证毕.

定理 4　设 f 和 $g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是凸的并且连续可微,设 x^* 是问题(P)的一个最优解,如果 $\bar{x}$ 是问题(PI_β)的一个最优解,并且对问题(P)是可行的,设 $\bar{y}\in\mathbf{R}^n$ 是对应的 $\bar{x}$ 的一个 Lagrange 乘子,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,有

$$f(x^*)\leqslant f(\bar{x})\leqslant f(x^*)+\frac{3}{2}\beta\varepsilon^v \tag{5}$$

即 $\bar{x}$ 是问题(P)的一个近似最优解.

证明　因为 f 和 $g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是凸的并且连续可微,所以

$$f(x^*)\geqslant f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^*-\bar{x}) \tag{6}$$

$$g_i(x^*)\geqslant g_i(\bar{x})+\nabla g(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^*-\bar{x}) \tag{7}$$

因为 x^* 是问题(P)的一个最优解,$\bar{y}\in\mathbf{R}^n$ 是对应的 $\bar{x}$ 的一个 Lagrange 乘子,所以

$$\begin{aligned}\varphi_{\beta,v}(x^*)=f(x^*)+\beta\sum_{i=1}^{m}p_v(g_i(x^*))\geqslant\\ f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^*-\bar{x})=\\ f(\bar{x})-\sum_{i\in I}\bar{y}_i\nabla g_i(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x^*-\bar{x})\geqslant\\ f(\bar{x})-\sum_{i\in I}\bar{y}_i[g_i(x^*)-g_i(\bar{x})]=\end{aligned}$$

$$f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \bar{y}_i g_i(x^*) \geq f(\bar{x})$$

因为

$$0 \leq \varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x^*) - \varphi_{\beta,v}(x^*) \leq \frac{3}{2} m\beta\varepsilon^v$$

所以

$$f(\bar{x}) \leq \varphi_{\beta,v}(x^*) \leq \varphi_{\beta,\varepsilon,v}(x^*) + \frac{3}{2} m\beta\varepsilon^v = f(x^*) + \beta \sum_{i \in I} p_{\varepsilon,v}(g_i(x^*)) + \frac{3}{2} m\beta\varepsilon^v = f(x^*) + \frac{3}{2} m\beta\varepsilon^v$$

又因为$\bar{x}$对问题(P)是可行的,即$f(x^*) \leq f(\bar{x})$,故式(5)式成立.

4 结束语

针对不等式约束非线性规划问题提出了一个新的含参罚函数的构造,将有约束问题转化为无约束问题,从理论上证明了精确性所满足的条件,分析了它的性质.

参考文献:

[1] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法[M].北京:科学出版社,1997

[2] YANG X Q,MENG Z Q,HUANG X X.Smoothing nonlinear penalty function for constrained optimization problems[J].Numerical Function Analysis and Optimization,2003(24):3-4;351-364

[3] WU Z Y,BAI F S,YANG X Q.An exact lower order penalty function and its smoothing in nonlinear programming[J].Optimization,2004,53 (1):51-68

[4] XU X S H,MENG Z H Q,SUN J W,etal.A penalty function method based on smoothing lower order penalty function[J].Joumal of Computational and Applied Mathematics,2001(235):4047-4058

[5] MUSTAFA C,PINAR,STAVROS A.etal.Zenios,On smoothing exact penalty functions for convex constrined optimization[J].SIAM Joumal on Optimization,1994(4):486-511

[6] YANG X Q. Smoothing approximations to nonsmooht optimization problems[J].Joumal of the Australian Mathematical Society,1994(36):274-285

A New Smooth Lower Order Exact Penalty Function

ZHANG Xia

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: With regard to inequality constrained optimization problem, this paper puts forward a kind of new lower order exact penalty function structure, in order to make it unconstrained and easily solved problem, gives deviation estimation of objective function between smooth penalty problem and non-smooth penalty problem and between smooth penalty problem and original problem and proves that global optimal solution of smooth penalty problem is approximate optimal solution of original problem under weakly supposed condition.

Key words: constrained optimization problem; exact penalty function; smoothing

责任编辑:李翠薇