文章编号:1672-058X(2013)08-0012-03

一类树图 $T^{2}_{n,n}$ 的超边幻和标号*

何 芳[1],刘家保[2]

(1.安徽大学 数学科学学院,合肥 230601;2.安徽新华学院 公共课程部, 合肥 230088)

摘 要:研究了一类树图 $T^{2}_{n,n}$ 的超边幻和标号问题,利用图论中边幻和标号以及超边幻和标号的定义,给出了两种不同的算法,严格地证明了此类树图 $T^{2}_{n,n}$ 不仅仅是边幻和图,同时也是超边幻和图,从而论证了有关树是超边幻和图的部分猜想。

关键词:超边幻和标号;超边幻和图;树图

中图分类号:O210 **文献标志码**:A

关于图标号的问题是组合图论中一项重要而有趣的内容。早期致力于研究某种特殊图是否具有图标号里面的某一种,并取得了相应的成果。今后将在此基础上继续关注与之相联系的问题,比如,具有某种标号的图有哪些,图的标号具有哪些性质,如何去构造具有某种给定标号的图等等。超边幻和标号问题是一类图的标号问题,至今国内外学者取得了一系列有关的重要成果[1-10]。例如 Enomoto[1] 等人猜想树是超边幻和图,R.M.Figueroa-Centeno[2] 也研究了超边幻和图。本文给出了一类树图 $T^{2}_{n,n}$ 是超边幻和图的结论,从而验证了树是超边幻和图的部分猜测问题。

1 基本概念

定义 1 对于一个给定的简单图 $G=(V,E)$,存在一个双射函数 $L: V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,\cdots,|V(G)\cup E(G)|\}$,使得对所有的边 $xy\in E(G)$,$x,y\in V(G)$,都有 $L(x)+L(y)+L(xy)=C$,C 为常数,则称 L 为图 G 的边幻和标号(edge-magic total labeling),图 G 称为具有边幻和标号 L 的边幻和图(edge-magic total graph)。

定义 2 设 L 为图 $G(V,E)$ 的边幻和标号,如果顶点标号满足:$L(V(G))=\{1,2,\cdots,|V(G)|\}$,则称 L 为图 G 的超边幻和标号(super edge-magic total labeling),图 G 称为具有超边幻和标号 L 的超边幻和图(super edge-magic total graph)。

定义 3 设图 G 是由长为 2 的路两端分别连接一个 n 星图的中心所得到的图,其顶点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$,其中,$V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n,u,w,v,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$;$E(G)=\{u_1u,u_2u,\cdots,u_nu\}\cup\{uw,wv\}\cup\{vv_1,vv_2,\cdots,vv_n\}$。则称图 G 为树图 $T^{2}_{n,n}$。

收稿日期:2013-03-02;修回日期:2013-04-07.

* 基金项目:安徽省高等学校省级自然科学基金项目(KJ2013B015);安徽新华学院质量工程建设资助项目(2012tskcx04).

作者简介:何芳(1990-), 女,湖北仙桃人,硕士研究生,主要从事组合图论研究.

2　结论及其证明

设树图 $T^2_{n,n}$ 的顶点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$，则其顶点数 $|V(T^2_{n,n})|=2n+3$，边数 $|E(T^2_{n,n})|=2n+2$。

定理 1　对于满足定义 3 的一类树图具有边幻和标号算法，$T^2_{n,n}$ 是边幻和图。

证明　定义函数 $L:V(T^2_{n,n})\cup E(T^2_{n,n})\to\{1,2,\cdots,4n+5\}$，给出图 $T^2_{n,n}$ 各顶点和边的标号算法如下：

i）图 $T^2_{n,n}$ 各顶点标号算法：

$$\begin{cases}L(u)=2n+3\\L(v)=2n+4\\L(w)=3n+5\\L(u_i)=2n+i+4,i=1,2,\cdots,n\\L(v_i)=3n+i+5,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

ii）图 $T^2_{n,n}$ 各边标号算法：

$$\begin{cases}L(uw)=n+2\\L(vw)=n+1\\L(uu_i)=2n-i+3,i=1,2,\cdots,n\\L(vv_i)=n-i+1,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

首先，证明 L 是从 $V(T^2_{n,n})\cup E(T^2_{n,n})\to\{1,2,\cdots,4n+5\}$ 的双射函数。令 $A=\{L(u),L(v),L(w),L(u_i),L(v_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}$，则 $A_1=\{L(u)\}=2n+3$；$A_2=\{L(v)\}=2n+4$；$A_3=\{L(w)\}=3n+5$；$A_4=\{L(u_i)=2n+i+4\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}=\{2n+5,2n+6,\cdots,3n+4\}$；$A_5=\{L(v_i)=3n+i+5\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}=\{3n+6,3n+7,\cdots,4n+5\}$。则 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=\{2n+3,2n+4,\cdots,4n+5\}$。

令 $B=\{L(uw),L(vw),L(uu_i),L(vv_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}$，则 $B_1=\{L(uw)\}=n+2$；$B_2=\{L(vw)\}=n+1$；$B_3=\{L(uu_i)=2n-i+3\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}=\{n+3,n+4,\cdots,2n+2\}$；$B_4=\{L(vv_i)=n-i+1\mid 1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,\cdots,n\}$。则 $B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4=\{1,2,\cdots,2n+2\}$。

从而 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$ 是所有顶点标号和边标号的集合，且有 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4=\{1,2,\cdots,4n+5\}$。

由上述可知，所有的顶点标号和边标号是各不相同的，所以 L 是从 $V(T^2_{n,n})\cup E(T^2_{n,n})\to\{1,2,\cdots,4n+5\}$ 的双射函数。

其次，对任意 $xy\in E(T^2_{n,n})$，$x,y\in V(T^2_{n,n})$，都有 $L(x)+L(y)+L(xy)=6n+10$，且图 $T^2_{n,n}$ 的下标 n 一旦确定，$L(x)+L(y)+L(xy)$ 为常数 $6n+10$。根据边幻和标号的定义，则 L 为图 $T^2_{n,n}$ 的边幻和标号，图 $T^2_{n,n}$ 是边幻和图。

综上所述，定理 1 得证。

定理 2　对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，树图 $T^2_{n,n}$ 具有超边幻和标号算法，是超边幻和图。

证明　令超边幻和常数 $C=6n+8$，定义函数 L 如下：

$$L:V(T^2_{n,n})\cup E(T^2_{n,n})\to\{1,2,\cdots,4n+5\}$$

给出图 $T^2_{n,n}$ 的另一种顶点标号和边标号算法如下：

(1) 图 $T^2_{n,n}$各顶点标号算法:

$$\begin{cases} L(u) = 2n + 3 \\ L(v) = 2n + 2 \\ L(w) = n + 1 \\ L(u_i) = 2n - i + 2, i = 1,2,\cdots,n \\ L(v_i) = n - i + 1, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

(2) 图 $T^2_{n,n}$各边标号算法:

$$\begin{cases} L(uw) = 3n + 4 \\ L(vw) = 3n + 5 \\ L(uu_i) = 2n + i + 3, i = 1,2,\cdots,n \\ L(vv_i) = 3n + i + 5, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

首先证明 L 是从顶点集 $V(T^2_{n,n})$到$\{1,2,\cdots,2n+3\}$的双射函数。则:令 $K=\{L(u),L(v),L(w),L(u_i),L(v_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n, i\in\mathbf{N}^*\}$,则 $K_1=\{L(u)\}=2n+3$;$K_2=\{L(v)\}=2n+2$;$K_3=\{L(w)\}=n+1$;$K_4=\{L(u_i)=2n-i+2\mid 1\leqslant i\leqslant n\}=\{n+2,n+3,\cdots,2n+1\}$;$K_5=\{L(v_i)=n-i+1\mid 1\leqslant i\leqslant n\}=\{1,2,\cdots,n\}$。则 $K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4\cup K_5$ 是所有顶点标号的集合,且有 $K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4\cup K_5=\{1,2,\cdots,2n+3\}$。

由上述可知,所有顶点标号是各不相同的,所以 L 是从顶点集 $V(T^2_{n,n})$到$\{1,2,\cdots,2n+3\}$的双射函数。

其次,证明 L 是从 $E(T^2_{n,n})$到$\{2n+4,2n+5,\cdots,4n+5\}$的双射函数。令 $S=\{L(uv),L(vw),L(uu_i),L(vv_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n, i\in\mathbf{N}^*\}$,则:$S_1=\{L(uw)\}=3n+4$;$S_2=\{L(vw)\}=3n+5$;$S_3=\{L(uu_i)=2n+i+3\mid 1\leqslant i\leqslant n\}=\{2n+4,2n+5,\cdots,3n+3\}$;$S_4=\{L(vv_i)=3n+i+5\mid 1\leqslant i\leqslant n\}=\{3n+6,3n+7,\cdots,4n+5\}$。

因此 $S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ 是所有边标号的集合,且有 $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\{2n+4,2n+5,\cdots,4n+5\}$。由上述可知,每条边的标号是各不相同的,且边的标号集合为$\{2n+4,2n+5,\cdots,4n+5\}$,所以 L 是从 $E(T^2_{n,n})$到$\{2n+4,2n+5,\cdots,4n+5\}$的双射函数。

对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,图 $T^2_{n,n}$的下标 n 一旦确定,超边幻和常数 $C=6n+8$。根据超边幻和标号定义,可以得出结论:L 为图 $T^2_{n,n}$的超边幻和标号,图 $T^2_{n,n}$是超边幻和图。

综上所述,定理 2 得证。

参考文献:

[1] ENOMOTO H, LIADO A S.NAKAMIGAWA T, RINGEL G. Super edge magic graphs[J]. SUT J.Math., 1998, 34:105-109.

[2] FIGUEROA-CENTENO R,LCHISHIMA R,MUNTANER-BATLE F.The place of super edge magic labelings among other classes of labelings[J]. Discrete Math.,2001(231):153-168

[3] KOTZIG A,ROSA A. Magic valuations of finite graphs[J]. Canad.Math.Bull,1970(13):451- 461

[4] 刘家保, 王 林, 陆一南.具有公共边的双圈图的奇优美标号及其算法[J].合肥工业大学学报:自然科学版,2012,35(6):857-859

[5] 严谦泰. 积图 $P_n\times P_m$ 的奇优美性和奇强协调性[J]. 系统科学与数学,2010,30(3):341-348

[6] 刘家保,张 季,聂东明.一类新的联图的优美标号算法[J].汕头大学学报: 自然科学, 2011(3):8-10

[7] 王 涛, 王 清, 李德明.非连通图$(P_3\vee\bar{K})\cup G$ 及$(C_3\vee\bar{K}_m)\cup G$ 的优美性[J].中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):54-57

[8] 刘家保, 王 林, 陆一南.双圈图 $G(n,m)$的奇优美标号及其算法 [J].合肥工业大学学报:自然科学版,2012,35(5):708-710

[9] 严谦泰.$P_{2r,2m}$的优美标号[J].系统科学与数学,2006,26(5):513-517

[10] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J].The Electronic Journal of Combinatorics,2009(16):1-219

(下转第 27 页)