文章编号:1672-058X(2013)08-0008-03

一种新的低阶罚函数的光滑化方法

秦 茜

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要: 对于约束优化问题,给出了一种用二次连续可微函数光滑低阶罚函数的方法;在一些弱的假设条件下,证明了光滑后的罚优化问题的最优解是原优化问题的 ε-近似最优解.

关键词: 约束优化问题;罚函数;光滑化方法;近似最优解

中图分类号: O221.2 **文献标志码:** A

考虑如下约束优化问题:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P})\ \min f(x)\\&\text{s.t.}\quad g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

其中 f 和 $g_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, i\in I=\{1,2,\cdots,m\}$ 都是二次连续可微的函数,$G=\{x\in\mathbf{R}^n \mid g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m\}$ 是原问题(P)上的非空可行集.罚函数方法是将有约束的原问题(P)转化为无约束的优化问题,使得原问题相对易解.

1 研究背景介绍

文献[1]中,首次提出了经典的 l_1 精确罚函数,表现形式如下:

$$F_1(x,\rho)=f(x)+\rho\sum_{i\in I}\max\{g_i(x),0\} \tag{1}$$

但是这种罚函数不是光滑的.因此在文献[2]中,提出了关于经典的 l_1 精确罚函数的光滑化方法,并且给出了 ε-光滑化函数 $q_\varepsilon(t)$ 的表现形式如下:

$$q_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, t\leqslant 0\\ \dfrac{t^2}{2\varepsilon}, 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ t-\dfrac{\varepsilon}{2}, t\geqslant\varepsilon\end{cases} \tag{2}$$

其中 ε 是一个正的标量.在很多研究中,又提出了 l_2 罚函数,表现形式如下:

$$F_2(x,\rho)=f(x)+\rho\sum_{i\in I}[\max\{g_i(x),0\}]^2 \tag{3}$$

这种罚函数虽然是光滑的,但不一定是精确的.文献[3]中,提出了 k-阶罚函数,其表现形式如下:

$$F_k(x,\rho)=[f(x)^k+\rho\sum_{i\in I}[\max\{g_i(x),0\}]^k]^{\frac{1}{k}} \tag{4}$$

收稿日期: 2013-03-08; **修回日期:** 2013-04-07.

作者简介: 秦茜(1980-),女,重庆长寿人,硕士研究生,从事最优化理论与算法研究.

显然，当 $k=1$ 时，k-阶罚函数就是经典的 l_1 精确罚函数；当 $k>1$ 时，这种罚函数是光滑的；当 $0<k\leqslant 1$ 时，这种罚函数是不光滑的，并且是低阶罚函数中的一种. 在文献[4]中，又提出了另一种低阶罚函数的表现形式如下：

$$F^k(x,\rho)=f(x)+\rho\sum_{i\in I}\left[\max\{g_i(x),0\}\right]^k \tag{5}$$

其中 $k\in(0,1)$. 文献[2]中，提出了关于式(5)的光滑近似解，并且给出的 ε-光滑化函数 $q_\varepsilon^k(t)$ 的表现形式如下：

$$q_\varepsilon^k(t)=\begin{cases}0, t\leqslant 0\\ \dfrac{t^{2k}}{2\varepsilon^k}, 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ t^k-\dfrac{\varepsilon^k}{2}, t\geqslant\varepsilon\end{cases} \tag{6}$$

显然，当 $k=1$ 时，公式(6)就是公式(2). 但是，公式(6)和公式(2)都只是一次连续可微的，到目前为止，很少有学者的研究是用二次连续可微的函数去光滑精确罚函数. 牛顿法在计算的时候收敛速度更快，计算效果更好，但是在解无约束优化问题时只适用于二次连续可微的函数. 所以，很有必要研究用二次连续可微的函数去光滑精确罚函数.

受到以上这些文献的影响，提出了一种新的用二次连续可微的函数去光滑低阶罚函数(5)，其中指出的二次连续可微函数的形式如下：

$$p_\varepsilon^k(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{t^{3k}}{6\varepsilon^{2k}}, 0\leqslant t<\varepsilon\\ t^k+\dfrac{\varepsilon^{2k}}{2t^k}-\dfrac{4\varepsilon^k}{3}, \varepsilon\leqslant t\end{cases} \tag{7}$$

其中 $k\in(0,1)$，ε 是光滑参数.

2　引理及定理的证明

考虑函数 $P^k(t)=\begin{cases}0, t<0\\ t^k, t\geqslant 0\end{cases}$，其中 $k\in(0,1)$. 则可以定义关于原问题(P)的低阶罚函数为：

$$F^k(x,\rho)=f(x)+\rho\sum_{i\in I}P^k(g_i(x)) \tag{8}$$

其中 ρ 是罚参数. 此时与原问题(P)一致的罚优化问题定义为：

$$(\mathrm{P}_1)\quad \min F^k(x,\rho)\ \text{s.t.}\ x\in\mathbf{R}^n$$

引理 1　对任意的 $k\in(\dfrac{2}{3},1)$ 和任意的 $\varepsilon>0$，以下两个结论成立：

(1) $\mathrm{P}_\varepsilon^k(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是二次连续可微的.

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon^k(t)=\mathrm{P}^k(t)$.

根据引理 1(1)，可以定义关于原问题(P)的光滑低阶罚函数为：

$$F^k(x,\rho,\varepsilon)=f(x)+\rho\sum_{i\in I}\mathrm{P}_\varepsilon^k(g_i(x)) \tag{9}$$

与原问题(P)一致的光滑的罚优化问题为：

$$(\mathrm{SP}_1)\quad \min F^k(x,\rho,\varepsilon)\ \text{s.t.}\ x\in\mathbf{R}^n$$

引理 2 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$,有$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F^k(x,\rho,\varepsilon) = F^k(x,\rho)$.

证明 从引理 1(2)中可知,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon^k(g_i(x)) = P^k(g_i(x)), i \in I$$

即是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho P_\varepsilon^k(g_i(x)) = \rho P^k(g_i(x))$$

因此

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^k(x,\rho,\varepsilon) = F^k(x,\rho)$$

定理 1 设$\{\varepsilon_j\} \to 0$是一正序列,并且对于某个给定的$\rho>0$,x^j是$\min_{x \in \mathbf{R}^n} F^k(x,\rho,\varepsilon)$的一个解.如果$\bar{x}$是序列$\{\varepsilon_j\}$的聚点,则$\bar{x}$是$(\mathrm{P}_1)$的最优解.

由定理 1 可知,通过解(SP_1)可以得到(P_1)的近似最优解.

引理 3 假设x^*是(P_1)的最优解,如果x^*是(P)的可行解,则x^*是(P)的最优解.

定义 1 如果x_ε是(P)的可行解,x^*是(P)的最优解,并且满足$|f(x^*)-f(x_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$,则$x_\varepsilon$是(P)的$\varepsilon$-近似最优解.

定义 2 如果x_ε满足对$\forall i \in I$有$g_i(x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, 则$x_\varepsilon \in \mathbf{R}^n$是(P)的$\varepsilon$-可行解.

定理 2 对给定的$\rho>0$和$\varepsilon>0$,如果x'是(P_1)的最优解,x_ε是(SP_1)的最优解,则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) = F^k(x',\rho)$$

更进一步,如果x'是(P)的可行解,x_ε是(P)的ε-可行解,则x_ε是(P)的ε-近似最优解.

证明 从引理 2 中可知

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^k(x',\rho,\varepsilon) = F^k(x',\rho)$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) = F^k(x_\varepsilon,\rho)$$

并且易证

$$0 \leqslant F_1(x',\rho) - F(x',\rho,\varepsilon) \leqslant \frac{4m\rho\varepsilon^k}{3}$$

$$0 \leqslant F_1(x_\varepsilon,\rho) - F(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) \leqslant \frac{4m\rho\varepsilon^k}{3}$$

由于x'是(P_1)的最优解,x_ε是(SP_1)的最优解,则

$$F_1^k(x',\rho) \leqslant F_1^k(x_\varepsilon,\rho)$$
$$F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) \leqslant F^k(x',\rho,\varepsilon)$$

即是

$$0 \leqslant F_1^k(x',\rho) - F^k(x',\rho,\varepsilon) \leqslant F_1^k(x',\rho) - F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) \leqslant F_1^k(x_\varepsilon,\rho) - F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) \leqslant \frac{4m\rho\varepsilon^k}{3}$$

故$F_1^k(x',\rho)-\dfrac{4m\rho\varepsilon^k}{3} \leqslant F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) \leqslant F_1^k(x',\rho)$.

因此有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^k(x_\varepsilon,\rho,\varepsilon) = F^k(x',\rho)$$

$$0 \leqslant f(x') + \rho \sum_{i \in I} P^k(g_i(x')) - [f(x_\varepsilon) + \rho \sum_{i \in I} P_\varepsilon^k(g_i(x_\varepsilon))] \leqslant \frac{4m\rho\varepsilon^k}{3}$$

特别地,如果x'是(P)的可行解,x_ε是(P)的ε-可行解,则

$$\sum_{i \in I} P^k(g_i(x')) = 0, \quad \sum_{i \in I} P_\varepsilon^k(g_i(x_\varepsilon)) \leqslant \frac{m\varepsilon^k}{6}$$

因此,有

$$\rho \sum_{i \in I} P_{\varepsilon}^{k}(g_i(x_{\varepsilon})) \leqslant f(x') - f(x_{\varepsilon}) \leqslant \frac{4m\rho\varepsilon^{k}}{3} + \rho \sum_{i \in I} P_{\varepsilon}^{k}(g_i(x_{\varepsilon}))$$

即$\frac{m\rho\varepsilon^{k}}{6} \leqslant f(x') - f(x_{\varepsilon}) \leqslant \frac{m\rho\varepsilon^{k}}{6} + \frac{4m\rho\varepsilon^{k}}{3}$.

由引理 3 可知,x'是(P)的最优解.故 x_{ε} 是(P)的 ε-近似最优解.

3　结束语

对于解约束优化问题,给出了一种用二次连续可微的函数去光滑低阶罚函数的方法.并且在一些弱的假设条件下,证明了光滑的罚优化问题(SP_1)的最优解是原优化问题(P)的 ε-近似最优解.因此,在一些弱的假设条件下,通过解(SP_1)就可以得到(P)的近似最优解.

参考文献:

[1] ZANGWILL W I.Nonlinear Programming via penalty function[J].Management Sciences,1967, 13(5): 334-358

[2] YANG X Q.Smoothing approximations to nonsmooth optimization problems[J]. J Aust Math Soc,1994, B36: 274-285

[3] RUBINOV A M, GLOVER B M, YANG X Q. Extended lagrange and penalty functions in continuous optimization[J]. Optimization, 1999(46): 327-351

[4] MENG K W, LI J S, YANG X Q.A robust SQP method based on a smoothing lower order penalty function[J]. Optimization, 2009(58): 22-38

[5] PINAR M C, ZENIONS S A. On smoothing exact penalty functions for convex constrained optimization[J].SIAM Journal on Optimization,1994,4(3): 486-511

[6] YANG X Q, MENG Z Q. HUANG X X. Smoothing nonlinear penalty functions for constrained optimization[J]. Numer Funct Anal Optim, 2003, 24(3-4): 351-364

[7] XU X S, MENG Z Q, SUN J W. A penalty function method based on smoothing lower order penalty function[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2011(235): 4047-4058

A New Smoothing Method for Lower-order Penalty Function

QIN Qian

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: With regard to constrained optimization problems, this paper gives a kind of new method by using second-order continuous differentiable function to smooth lower order penalty function, under some weak supposed conditions, proves that the optimal solution of penalty and optimization problems after smoothing is ε-approximate optimal solution of original optimization problem.

Key words: constrained optimization problem; penalty function; smoothing method; approximate optimal solution

责任编辑:李翠薇