文章编号:1672-058X(2013)08-0001-03

函数一致连续性的几个判别法及其应用*

费时龙,占伟军

(宿州学院 数学与统计学院, 安徽 宿州 234000)

摘　要:给出了判别函数一致连续性的几种方法,并举例加以说明.

关键词:函数; 一致连续; 连续函数

中图分类号:O172　　　　**文献标志码**:A

函数的一致连续性是数学分析中的一个重要概念,它在证明连续函数的可积性理论中有着重要应用,如何判别函数的一致连续性是数学分析中的一个重要问题.常见的教材中给出判别函数的一致连续性方法较少,这里主要讨论判别函数一致连续性的若干方法,并给出这些方法的一些具体应用.

引理 1[1]　设区间 I_1 的右端点为 $c\in I_1$,区间 I_2 的左端点也为 $c\in I_2$(I_1,I_2 可分别为有限或无限区间).若 f 分别在 I_1 和 I_2 上一致连续,则 f 在 $I=I_1\cup I_2$ 上也一致连续.

定理 1　设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义且周期为 T,若 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

证明　因为 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上连续,故在 $[0,T]$ 一致连续,所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $x_1,x_2\in[0,T]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,下证 $f(x)$ 在 $[-T,0]$ 上一致连续.设 $x_3,x_4\in[-T,0]$,满足 $|x_3-x_4|<\delta$,则 $x_3+T\in[0,T]$, $X_4+T\in[0,T]$,且

$$|(x_3+T)-(x_4+T)|<\delta$$

从而有

$$|f(x_3)-f(x_4)|=|f(x_3+T)-f(x_4+T)|<\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 $[-T,0]$ 上一致连续.由引理 1 知, $f(x)$ 在 $[-T,T]$ 上一致连续,因此对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists 0<\delta<\frac{T}{2}$,对 $\forall x',x''\in[-T,T]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.下证 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续:对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$,必存在整数 k, s.t. $x_1+kT\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$,故当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有 $x_2+kT\in[-T,T]$,从而

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1+kT)-f(x_2+kT)|<\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

例 1　证明函数 $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\sin mx$, $f_4(x)=\cos nx$(m,n 均为正整数)分别在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

证明　因为 $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$ 均以 2π 为周期,且在 $[0,2\pi]$ 上连续,从而由定理 1 知 $f_1(x)=$

收稿日期:2013-01-24;**修回日期**:2013-03-02.

* **基金项目**:安徽省教育科学规划项目(JG10340);宿州学院自然科学研究项目(2011yyb06);宿州学院教学研究项目(szxyjyxm201237).

作者简介:费时龙(1980-),男,安徽芜湖人,讲师,硕士,从事随机过程的研究.

$\sin x, f_2(x) = \cos x$ 分别在$(-\infty,\infty)$上一致连续,同理可得$f_3(x) = \sin mx$ 也在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

定理 2 设 $y=f(u)$ 在区间 I_1 上一致连续,$u=g(x)$ 在 I_2 上一致连续,且 $g(I_2)\subset I_1$,则复合函数 $y=f\circ g(x)$ 在 I_2 上一致连续.

证明 因为 $y=f(u)$ 在 I_1 上一致连续,故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t.当 $u_1,u_2\in I_1$ 且 $|u_1-u_2|<\delta$ 时,有 $|f(u_1)-f(u_2)|<\varepsilon$,又因为 $u=g(x)$ 在 I_2 上一致连续,从而对上述 $\delta>0$, $\exists\delta'>0$, s.t.当 $x_1,x_2\in I_2$ 且 $|x_1-x_2|<\delta'$ 时,有 $|u_1-u_2|<\delta$,即 $|g(x_1)-g(x_2)|<\delta$,故

$$|f(g(x_1)) - f(g(x_2))| < \varepsilon$$

所以 $y=f\circ g(x)$ 在 I_2 上一致连续.

例 2 证明函数$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证明 因为$f(u)=\sin u$ 在$(-\infty,\infty)$上一致连续,$u=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续,从而由定理 2 知,函数$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

注 1 若 $y=f(u)$在区间 I_1 上一致连续,$u=g(x)$在 I_2 上连续,且 $g(I_2)\subset I_1$,则复合函数 $y=f\circ g(x)$在 I_2 上未必一致连续.反例如下:

例 3 函数$f(x)=\sin(x^2)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

注 2 若 $y=f(u)$在区间 I_1 上连续,$u=g(x)$在 I_2 上一致连续,且 $g(I_2)\subset I_1$,则复合函数 $y=f\circ g(x)$在 I_2 上未必一致连续.反例如下:

例 4 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上不一致连续.

定理 3 设 $y=f(x)$, $y=g(x)$均在有限的开区间(a,b)上一致连续,则 $y=f(x)g(x)$也在(a,b)上一致连续.

证明 首先考察 $y=f(x)$在 $x=a$ 及 $x=b$ 点的极限,由 $y=f(x)$在(a,b)上一致连续知 $y=f(x)$在 $u_+^o(a)$及 $u_-^o(b)$满足 Cauchy 收敛准则的条件,从而 $y=f(x)$在 a 点的右极限及 b 点的左极限存在,令

$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$在$[a,b]$上连续.同理可得 $g(x)$在 a 点的右极限及 b 点的左极限均存在.令

$$G(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}g(x), & x=a\\ g(x), & a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b^-}g(x), & x=b\end{cases}$$

则 $G(x)$也在$[a,b]$上连续,因而 $F(x)G(x)$在$[a,b]$上连续,从而有 Cantor 定理知,$F(x)G(x)$在$[a,b]$上一致连续.所以$f(x)g(x)$在(a,b)上一致连续.

注:若(a,b)改成无穷区间,则命题未必成立.反例如下:

例 5 $f(x)=g(x)=x$ 在$(-\infty,\infty)$均一致连续,但$f(x)\cdot g(x)=x^2$ 在$(-\infty,\infty)$上不一致连续.

定理 4 若$f(x)$, $g(x)$均在$(-\infty,\infty)$上一致连续且有界,则$f(x)\cdot g(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

证明 由$f(x)$, $g(x)$均在$(-\infty,\infty)$上有界知 $\exists M>0$, s.t. $|f(x)|\leqslant M$, $|G(x)|\leqslant M$.又因为$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续,故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t.当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\exists\delta_2>0$, s.t.当 $|x_3-x_4|<\delta_2$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$,令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}
&|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|\leqslant\\
&|f(x_1)g(x_1)-f(x_1)g(x_2)+f(x_1)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)|\leqslant\\
&|f(x_1)g(x_1)-f(x_1)g(x_2)|+|f(x_1)g(x_2)-f(x_2)g(x_2)|\leqslant\\
&|f(x_1)||g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)||f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\\
&M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon
\end{aligned}$$

例 6　证明函数 $f_1(x)=\sin^m x, f_4(x)=\cos^n x$（$m,n$ 均为正整数）分别在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

证明　由定理 4 显然.

定理 5　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，s.t. 当 $x_1>M, x_2>M$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，又因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上连续，从而由 Cantor 定理知，$f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$(\delta<1)$ $s.t$，$x'\in[a,M+1]$，$x''\in[a,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，因此对 $\forall x_3,x_4\in[a,+\infty)$ 且 $|x_3-x_4|<\delta$ 时，必满足下列条件之一：

（a）$x_3>M, x_4>M$.

（b）$x_3\in[a,M+1], x_4\in[a,M+1]$ 且 $|x_3-x_4|<\delta$.

从而有 $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

参考文献：

[1] 华东师大数学系.数学分析[M]. 北京:高等教育出版社,2001

[2] 同济大学数学系.高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2001

[3] 费时龙,张增林. 一个不等式及其应用[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27 (6):554-557

Several Discriminating Methods for Uniform Continuity of Function and Their Application

FEI Shi-long, ZHAN Wei-jun

(School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Anhui Suzhou 234000, China)

Abstract: This paper gives several methods for discriminating uniform continuity of function and gives examples to illustrate them.

Key words: function; uniform continuity; continuous function

责任编辑:李翠薇