文章编号:1672-058X(2013)07-0019-05

二层随机规划逼近解集的稳定性分析*

周婉娜[1], 霍永亮[2]
(1.重庆师范大学 数学学院,重庆 400047;2.重庆文理学院 数学与财经学院数学研究所,重庆 402160)

摘　要: 以下层随机规划的最优值作为响应,反馈到上层的一类二层随机规划问题,可以放宽对下层随机规划需要提供唯一最优解的要求;首先讨论了下层随机规划逼近最优值的收敛性,然后将下层随机规划的最优值反馈到上层,得到了上层随机规划逼近最优解集序列的上半收敛性.

关键词: 二层随机规划;最优解集;上半收敛;最优值

中图分类号: O211.5　　**文献标志码:** A

近几十年来,国内外许多学者对随机规划的逼近理论有了较深入的研究,随机规划稳定性理论的内容也得到了极大的丰富. 文献[1]分别对随机规划的期望模型、机会约束模型以及二阶段固定补偿模型作了全面的探讨,得到了一些好的结果. 文献[2]研究了当离散化随机变量序列依分布收敛时,随机规划逼近解的收敛性. 文献[3]将随机函数引入随机规划问题中,研究了最优函数逼近问题的收敛性. 文献[4,5]讨论了在 Fourtet-Mourier 度量上随机规划问题的稳定性. 文献[6]研究了逼近随机规划可行集序列的收敛性条件,得到了随机规划逼近最优解集的上半收敛性. 文献[7]利用 Kuratowski 收敛,研究了二层规划问题逼近法的有关上图收敛性问题. 文献[8]研究了以下层最优值作为响应反馈到上层的一类二层规划的逼近问题的收敛性. 文献[9]研究了当可行集依赖于离散化概率测度时,目标函数的上图收敛性. 目前对二层随机规划稳定性的研究相对较少,此处利用上图收敛性,分别研究了下层随机规划最优值的收敛性和将下层随机规划的最优值反馈到上层时,上层随机规划最优解集序列的上半收敛性. 研究的内容与文献[7,8]的区别在于:

研究了二层随机规划逼近最优解集的上半收敛性,而文献[7,8]只研究了一般二层规划目标函数的上图收敛性;

考虑如下的二层随机规划问题:

$$\min_{x\in X}\int_{\mathbf{R}^p} F(x, v_0(x), u)\mu_0(\mathrm{d}u) \tag{1a}$$

$$v_0(x)=\min_{y\in Y}\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

$$\text{s.t}\quad \int_{\mathbf{R}^p} g_j(x,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)\leqslant 0, j=1,2,\cdots,d \tag{1b}$$

相应的逼近问题为:

$$\min_{x\in X}\int_{\mathbf{R}^p} F(x, v_n(x), u)\mu_n(\mathrm{d}u) \tag{2a}$$

$$v_n(x)=\min_{y\in Y}\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u)$$

收稿日期: 2013-01-03;**修回日期:** 2013-03-08.

* **基金项目:** 重庆市教委科研基金资助项目(KJ091211).

作者简介: 周婉娜(1987-),女,陕西临潼人,硕士研究生,从事随机规划稳定性理论研究.

$$s.t\int_{\mathbf{R}^p} g_j(x,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant 0, j=1,2,\cdots,d \tag{2b}$$

其中始终假设 X 和 Y 分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 上的紧集,F,f,g 是定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\mathbf{R}^p$ 上的函数.

1 下层随机规划最优值的收敛性

为了讨论上层问题解的稳定性,首先讨论下层问题解的稳定性.

当 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 固定时,下层规划问题的原问题(1b)变为

$$v_0(x_0)=\min_{y\in Y}\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

$$\text{s.t}\quad \int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_0,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0, j=1,2,\cdots,d \tag{3}$$

当 $x_n\to x_0$ 时,相应的逼近问题变为

$$v_n(x_n)=\min_{y\in Y}\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u)$$

$$\text{s.t}\quad \int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_n,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant 0, j=1,2,\cdots,d \tag{4}$$

问题(3)和(4)的可行集分别记为 $S_0(x_0)$ 和 $S_n(x_n)$.

$$S_0(x_0)=\left\{y\in Y\subset\mathbf{R}^m:\int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_0,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)\leqslant 0, j=1,2\cdots,d\right\}$$

$$S_n(x_n)=\left\{y\in Y\subset\mathbf{R}^m:\int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_n,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u)\leqslant 0, j=1,2\cdots,d\right\}$$

问题(3)和问题(4)又可转化成与其等价的确定性规划问题(5)和(6).

$$\tilde{v}_0(x_0)=\min_{y\in Y}\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{s_0(x_0)}(y)\right] \tag{5}$$

$$\tilde{v}_n(x_n)=\min_{y\in Y}\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{s_n(x_n)}(y)\right] \tag{6}$$

其中

$$\delta_s(y)=\begin{cases}0 & y\in s\\ +\infty & y\notin s\end{cases}$$

问题(5)和(6)的最优解集分别记为 $M_0(x_0)$ 和 $M_n(x_n)$,则有 $v_0(x_0)=\tilde{v}_0(x_0)$,$v_n(x_n)=\tilde{v}_n(x_n)$.

引理 1[10] 若 $x_n\to x_0$ 且 $f(x,y,u)$ 在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上连续且有界,$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$,则对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^m$,且 $y_n\to y_0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n,y_n,u)\mu_n(\mathrm{d}u)=\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0,y_0,u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

引理 2[10] 若 $x_n\to x_0$,令 $G_n^j(y)=\int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_n,y,u)\mu_n(\mathrm{d}u)$,$G_0^j(y)=\int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_0,y,u)\mu_0(\mathrm{d}u)$,$j=1,2,\cdots,d$,则

(1) 若 $g_j(x,y,u)(j=1,2,\cdots,d)$,在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上下半连续且下有界,$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$,则 $G_n^j(y)$ 下半收敛于 $G_0^j(y)$.

(2) 若 $g_j(x,y,u)(j=1,2,\cdots,d)$,在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上下半连续且下有界,则对每个固定的 n_0,$G_{n_0}^j(y)$ 和 $G_0^j(y)$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上下半连续.

(3) 若 $g_j(x,y,u)(j=1,2,\cdots,d)$,在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上下半连续且下有界,则对每个固定的 y,$g_j(x,y,u)$ 关于 (x,u) 上半连续,且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n^j(y)=G_0^j(y)$.

定义 1[6] 称可行集 $S_0(x_0)$ 是正则的,即满足 $S_0(x_0)=\mathrm{cl}S_0(x_0)^0$,且 $S_0(x_0)^0\neq\varnothing$,其中

$$S_0(x_0)^0 = \left\{ y \in Y \subset \mathbf{R}^m : \int_{\mathbf{R}^p} g_j(x_0, y, u)\mu_0(\mathrm{d}u) < 0, j = 1,2,\cdots,d \right\}$$

定义 2[10]　如果在 $\mathbf{R}^n$ 中,有 $x_n \to x_0$,称 $f_n(x_n, y)$ 上图收敛于 $f(x_0, y)$,记为 $f_n \xrightarrow{\text{epi}} f$,是指

(1) 对任意 $y_n \to y_0$,有 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x_n, y_n) \geqslant f(x_0, y_0)$.

(2) 存在某个 $y_n \to y_0$,使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x_n, y_n) \leqslant f(x_0, y_0)$.

引理 3[10]　若 $x_n \to x_0$ 且 $f(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续且有界,$g_j(x, y, u)(j = 1,2,\cdots,d)$,在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界,对每个固定的 y,$g_j(x, y, u)$ 关于(x, u)上半连续,可行集 $S_0(x_0)$ 正则,且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 则有

$$\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n, y, u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{s_n(x_n)}(y)\right] \xrightarrow{\text{epi}} \left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0, y, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{s_0(x_0)}(y)\right]$$

定理 1　若 $x_n \to x_0$ 且 $f(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续且有界,$g_j(x, y, u)(j = 1,2,\cdots,d)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界,对每个固定的 y,$g_j(x, y, u)$ 关于(x, u)上半连续,可行集 $S_0(x_0)$ 正则,且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x_n) = v_0(x_0)$$

证明　由引理 3 有

$$\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n, y, u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{s_n(x_n)}(y)\right] \xrightarrow{\text{epi}} \left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0, y, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{s_0(x_0)}(y)\right]$$

又由于 Y 的紧致性及 $M_n(x_n) \cap Y = M_n(x_n) \neq \varnothing$,由文献[9]的定理 7,则有

$$\lim_{n\to\infty}\min\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_n, y, u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{s_n(x_n)}(y)\right] = \min\left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x_0, y, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{s_0(x_0)}(y)\right]$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n(x_n) = \tilde{v}_0(x_0)$$

因为　$v_0(x_0) = \tilde{v}_0(x_0)$,$v_n(x_n) = \tilde{v}_n(x_n)$,所以有

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x_n) = v_0(x_0)$$

即逼近问题的最优值收敛于原问题的最优值.

2　上层随机规划最优解集的收敛性

上层规划的原问题改写为

$$\min_{x\in X}\int_{\mathbf{R}^p} F(x, v_0(x), u)\mu_0(\mathrm{d}u) \tag{7}$$

相应的逼近问题改写为

$$\min_{x\in X}\int_{\mathbf{R}^p} F(x, v_n(x), u)\mu_n(\mathrm{d}u) \tag{8}$$

问题(7)和问题(8)的最优解集分别为 $\widetilde{M}_0$ 和 $\widetilde{M}_n$.

定理 2　若 $x_n \to x_0$ 且 $F(x, v(x), u)$,$f(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界,$g_j(x, y, u)(j = 1,2,\cdots,d)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界,对每个固定的 y,$g_j(x, y, u)$ 关于(x, u)上半连续,可行集 $S_0(x_0)$ 正则,且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} F(x_n, v_n(x_n), u)\mu_n(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbf{R}^p} F(x_0, v_0(x_0), u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

证明　由定理 1,当 $x_n \to x_0$ 时,$v_n(x_n)$ 收敛于 $v_0(x_0)$,此外由于 $F(x, v(x), u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界,所以

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n, v_n(x_n), u) = F(x_0, v_0(x_0), u)$$

又由引理 2,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} F(x_n, v_n(x_n), u)\mu_n(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbf{R}^p} F(x_0, v_0(x_0), u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 到集合 $B\subset\mathbf{R}^n$ 的上半距离定义为 $e(A,B)=\sup_{y\in A} d(y,B)$.其中,

$$d(x,C)=\begin{cases}\inf\{x-y:y\in C\} & 当\ C\neq\varnothing\\ +\infty & 当\ C=\varnothing\end{cases}$$

定义 3[11] 若 $x_n\to x_0$,称集合序列$\{M_n(x_n)\}$上半收敛于 $M_0(x_0)$是指

$$\lim_{n\to\infty} e(M_n(x_n), M_0(x_0)) = 0$$

定理 3 若 $F(x,v(x),u)$,$f(x,y,u)$在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上连续有界,$g_j(x,y,u)(j=1,2,\cdots,d)$,在 $X\times Y\times\mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界,对每个固定的 y,$g_j(x,y,u)$关于(x,u)上半连续,对任意 $x_0\in\mathbf{R}^n$,可行集 $S_0(x_0)$正则,且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$,则问题(8)的最优解集序列$\{\tilde{M}_n\}$上半收敛与问题(7)的最优解集 $\tilde{M}_0$.

证明 令 $H_0(x)=\int_{\mathbf{R}^p}F(x,v_0(x),u)\mu_0(\mathrm{d}u)$,$H_n(x)=\int_{\mathbf{R}^p}F(x,v_n(x),u)\mu_n(\mathrm{d}u)$,应用定理 2,当 $x_n\to x_0$ 时有,$\lim_{n\to\infty} H_n(x_n)=H_0(x_0)$,由于 X 是紧的,则有 $X\xrightarrow{k}X$,所以

$$H_n(x)+\delta_X(y)\xrightarrow{\text{epi}}H_0(x)+\delta_X(y)$$

由于 X 非空,而 $\tilde{M}_n\cap X\neq\varnothing$且 $\tilde{M}_0\cap X\neq\varnothing$,为了证明$\lim_{n\to\infty} e(\tilde{M}_n,\tilde{M}_0)=0$,即只需证明,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_0$,当 $n\geqslant N_0$ 时,有 $e(\tilde{M}_n,\tilde{M}_0)<\varepsilon$,也即需证明对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_0$,当 $n\geqslant N_0$ 时,有 $\tilde{M}_n\subset\tilde{M}_0+B_\varepsilon(0)$,其中 $B_\varepsilon(0)=\{y\subset\mathbf{R}^m, y<\varepsilon\}$,对任意包含 $\tilde{M}_0$ 的开集 V,存在 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\tilde{M}_n\subset V$,假设不成立,即存在 n_k,使得 $y_{n_k}\in M_{n_k}$,但 $y_{n_k}\notin V$,而由于 $M_{n_k}\subset Y$ 及 Y 的紧致性,则$\{y_{n_k}\}$必存在聚点 y_0,而 V 为开集,则 $y_0\notin V$,而另一方面,由引理 3 可得,$y_0\in M_0$,即 $y_0\in V$ 与 $M_0\subset V$ 矛盾,特别取 $V=M_0+B_\varepsilon(0)$,从而有$\lim_{n\to\infty} e(M_n,M_0)=0$.

参考文献:

[1] ROGER J B, WETS. Stochastic Programming[M].Elsevier Science Publisher, 1989

[2] 骆建文,鲁世杰.随机规划逼近解的收敛性 [J].浙江大学学报:自然科学版,2000,27(5):493-497

[3] LUO J W. Stability Analysis for Stochastic Optimization Problems[J]. Shanghai Jiaotong University, 2007,12(5):684-687

[4] ROMISH W, SCHULTZ R. Stability analysis for stochastic programs[J]. Annals of Operations Research, 1991,30:241-266

[5] DUPATCOVA J,GROWE-KUSKA N, ROMISH W. Scenario reduction in stochastic programming: An approach using probability metric[J].Mathematical programming,2003,95(3):493-511

[6] 霍永亮,刘三阳. 随机规划逼近最优解集的上半收敛性[J].西安电子科技大学学报:自然科学版,2005,32(6):953-957

[7] 万仲平,吴国民,陈开周.一类二层规划的上图收敛性[J].运筹学学报,1998,2(24):48-53

[8] 万仲平.关于二层规划的逼近问题[J].系统科学与数学,2000,20(3):289-294

[9] TEEMU PENNANEN,MATTI KOIVU. Epi-convergent discretizations of stochastic programs via integration quadratures[J]. Numer Math,2005,100(1): 141-163

[10] 霍永亮. 随机规划稳定性理论[M].成都:西南交通大学出版社,2010

Analysis of the Stability for the Solution Set to Stochastic Programming Approximation of Bi-level

ZHOU Wan-na[1], HUO Yong-liang[2]

(1. School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China;
2. Mathematics Institute, School of Mathematics, Finance and Economics,
Chongqing Art and Science University, Chongqing Yongchuan 402160, China)

Abstract: By using the optimal value of lower-level stochastic programming as a response to feedback to a class of upper bi-level stochastic programming problem, the requirement for providing sole optimal solution may be relaxed to lower-level stochastic programming demand. This paper firstly discusses the convergence for the optimal value of lower-level stochastic programming approximation, then feedbacks the optimal value of lower-level stochastic programming to the upper level and finally obtains the upper-level semi-convergence of the optimal solution set sequence of upper stochastic programming approximation.

Key words: bi-level stochastic programming; optimal solution set; upper semi-convergence; optimal value

责任编辑:李翠薇

(上接第 15 页)

A Kind of New k-d Class of Estimation in Linear Model

WANG Guo-ping

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper proposes a new kind of two-parameter estimation of prior information regarding parameters by considering sample information in linear model and indicates that this new kind of two-parameter estimation is better than Liu-type estimator and modified Liu-type estimator under the regulation of mean square error matrix.

Key words: new kind of k-d estimation; modified Liu-type estimator; modified ridge estimation; prior information

责任编辑:李翠薇