文章编号:1672-058X(2013)07-0006-03

向量优化问题拟有效解的最优性充分条件*

廖 伟,彭 婕
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:在实拓扑向量空间中,利用距离函数,给出了向量优化问题局部拟有效解和拟有效解的概念,提出了四类新的广义近似凸函数并建立了向量优化问题局部拟有效解和局部有效解的最优性充分条件;其结果是对文献[5]的相应结果的推广。

关键词:向量优化问题;拟有效解;最优性条件

中图分类号:O221.2 **文献标志码**:A

近年来,向量优化理论与应用研究越来越受到广大学者的关注和重视。有效解是向量优化问题中的一个重要概念,关于有效解的研究也取得了一些成果,见文献[1-3]。随着研究的进一步发展,向量优化问题的近似解的概念被提出来。其中,拟有效解是向量优化近似解的一个重要的概念。Guptia 等人在文献[4]中利用近似凸函数,给出了非光滑向量优化问题的拟有效解的最优性条件。Bhatia 等人在文献[5]中提出了几类新的广义近似凸函数的概念并举例验证了这几类广义近似凸函数的存在性,同时建立了向量优化问题的拟有效解的充分最优性条件。在文献[4-5]的基础上,利用距离函数给出了四类新的广义近似凸函数的概念并建立了向量优化问题的局部拟有效解和局部有效解的充分最优性条件。

1 预备知识

设 Γ 是实拓扑向量空间,R^p 是 P 维欧几里得空间,R_+^p 是 R^p 的非负序锥。对任意 $x,y\in R^p$,定义下面的序关系:

$$x < y \Leftrightarrow x - y \in -\mathrm{int}R_+^p;\ x \leqslant y \Leftrightarrow x - y \in -R_+^p \setminus \{0\};\ x \leqq y \Leftrightarrow x - y \in -R_+^p。$$

考虑下面的向量优化问题:

$$(\mathrm{VP})\ \mathrm{Min}\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x))$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_j(x) \leqq 0, j = 1,2,\cdots,q \\ x \in X \subset \Gamma \end{cases}$$

其中 $f:X\to R^p$,$g:X\to R^q$。令 $S=\{x\in X:g_j\leqq 0,j=1,2,\cdots,q\}$ 是 VP 的可行集。

定义 1 称 $x_0\in S$ 是 VP 的有效解,如果对任意 $x\in S$,$f(x)-f(x_0)\notin -R_+^p\setminus\{0\}$。

定义 2 称 $x_0\in S$ 是 VP 局部有效解,如果存在 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x\in S\cap U$,$f(x)-f(x_0)\notin -R_+^p\setminus\{0\}$。

收稿日期:2013-02-13;**修回日期**:2013-03-04.

* **基金项目**:国家自然科学基金(11271391,11171363);重庆市自然科学基金重点项目(cstc2012jjA00002).

作者简介:廖伟(1987-),男,四川南充人,硕士研究生,从事向量优化理论与应用研究.

定义 3　称 $x_0 \in S$ 是 VP 的拟有效解,如果存在 $\alpha \in \mathrm{int}R_+^p$,对任意 $x \in S$,$f(x)-f(x_0)+\alpha d(x,x_0) \notin -R_+^p \setminus \{0\}$。

定义 4　称 $x_0 \in S$ 是 VP 的局部拟有效解,如果存在 $\alpha \in \mathrm{int}R_+^p$,存在 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x \in S \cap U$,$f(x)-f(x_0)+\alpha d(x,x_0) \notin -R_+^p \setminus \{0\}$。

定义 5[6]　称函数 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是局部 Lipschitz 的,如果存在正常数 L 和 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x_1, x_2 \in U$,$d(\psi(x_1),\psi(x_2)) \leqslant Ld(x_1,x_2)$。

定义 6[6]　令 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是局部 Lipschitz 的,则 ψ 在 x_0 沿方向 $v \in \Gamma$ 的 Clarke 广义方向导数为 $\psi^0(x_0;v) = \limsup\limits_{\lambda \to 0^+ y \to x_0} \dfrac{\psi(y+\lambda v)-\psi(y)}{\lambda}$。

定义 7[6]　函数 ψ 在 $x_0 \in X$ 的 Clarke 次微分,记为$\partial\psi(x_0)$,定义为$\partial\psi(x_0) = \{\xi \in \Gamma^*: \psi^0(x_0;v) \geqslant [\xi,v], \forall v \in \Gamma\}$。

下面给出 VP 的拟有效解的一个必要最优性条件。

定理 1　设 $x_0 \in S$ 是 VP 的拟有效解,令 $g(x)$ 在 x_0 处满足一定的约束规格或者正则性条件。进一步地,设 $f_i, i=1,2,\cdots\cdots,p$ 和 $g_j, j=1,2,\cdots\cdots,q$ 在 x_0 是局部 Lipschitz 的,则存在 $\alpha \in \mathrm{int}(R_+^p)$,$\lambda \in R_+^p$ 和 $u \in R_+^q$ 使得:

$$0 \in \partial\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x_0)\right) + \partial\left(\sum_{j=1}^{q} u_j g_j(x_0)\right) + \sum_{i=1}^{p} \partial(\lambda_i \alpha_i d(x,x_0))\big|_{x=x_0} \tag{1}$$

$$u_j g_j(x_0) = 0, j = 1,\cdots,q \tag{2}$$

$$\lambda^{\mathrm{T}} e = 1 \tag{3}$$

2　四类新的广义近似凸性

首先,回顾一下 Lipschitz 函数的伪凸性和拟凸性的定义。一个 Lipschitz 函数 $\psi: X \to R$ 称为在 $x_0 \in X$ 是伪凸,如果对任意 $x \in X$,$[\xi, x-x_0] \geqslant 0$,对某些 $\xi \in \partial\psi(x_0) \Rightarrow \psi(x) \geqslant \psi(x_0)$。

类似的 ψ 称为在 $x_0 \in X$ 是拟凸,如果对任意 $x \in X$,$\psi(x) \leqslant \psi(x_0) \Rightarrow [\xi, x-x_0] \leqslant 0, \forall \xi \in \partial\psi(x_0)$。

定义 8　称函数 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅰ型近似伪凸,若对所有 $c>0$,存在 x_0 的邻域 U,使得对某些 $\xi \in \partial\psi(x_0)$,$[\xi, x-x_0] \geqslant 0$,有 $\psi(x)-\psi(x_0) \geqslant -cd(x,x_0), \forall x \in U \cap X$。

定义 9　称函数 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅱ型近似伪凸(Ⅱ型严格近似伪凸),若对所有 $c>0$,存在 x_0 的邻域 U,使得对某些 $\xi \in \partial\psi(x_0)$,$[\xi, x-x_0]+cd(x,x_0) \geqslant 0$,有 $\psi(x) \geqslant (>) \psi(x_0), \forall x \in U \cap X$。

定理 2　若 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅱ型近似伪凸,则 ψ 在 x_0 是Ⅰ型近似伪凸。

证明　假设对某些 $\xi \in \partial\psi(x_0)$,$[\xi, x-x_0] \geqslant 0$,则对任意 $c>0$ 有$[\xi, x-x_0]+cd(x,x_0) \geqslant 0$。

由 ψ 是Ⅱ型近似伪凸,则存在 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x \in U \cap X$,$\psi(x) \geqslant \psi(x_0)$。故有 $\psi(x) \geqslant \psi(x_0)-cd(x,x_0)$。

因此 ψ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅰ型近似伪凸。

定义 10　称函数 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅰ型近似拟凸,若对所有 $c>0$,存在 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x \in U \cap X$,$\psi(x) \leqslant \psi(x_0)$,有$[\xi, x-x_0]-cd(x,x_0) \leqslant 0, \forall \xi \in \partial\psi(x_0)$。

定义 11　称函数 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅱ型近似拟凸(Ⅱ型严格近似拟凸),若对所有 $c>0$,存在 x_0 的邻域 U,使得对任意 $x \in U \cap X$,$\psi(x) \leqslant (<) \psi(x_0)+cd(x,x_0)$,都有$[\xi, x-x_0] \leqslant 0, \forall \xi \in \partial\psi(x_0)$。

定理 3　(i) 若 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是拟凸,则 ψ 在 x_0 是Ⅰ型近似拟凸;(ii) 若 $\psi: X \to R$ 在 $x_0 \in X$ 是Ⅱ型严格近似拟凸,则 ψ 在 x_0 是Ⅰ型近似拟凸。

证明:由拟凸的定义和定义 10-11,定理的证明是显然的。

3 最优性充分条件

接下来的两个定理分别给出了 VP 的局部拟有效解和局部有效解的最优性充分条件。

定理 4 假设(1)-(3)在 $x_0\in S$ 成立,对 $\lambda\in R_+^p, u\in R_+^q$,满足下面的条件:(i) $\lambda^{\mathrm{T}}f$ 在 x_0 是Ⅰ型近似拟凸;(ii) $u^{\mathrm{T}}g$ 在 x_0 是Ⅱ型严格近似伪凸,则 x_0 是 VP 的局部拟有效解。

证明:假设 x_0 不是 VP 的局部拟有效解,则对任意 $\beta>0$ 和 x_0 的任意邻域 U,存在 $x\in U\cap S$,使得 $f(x)-f(x_0)+\beta d(x,x_0)\in -R_+^p\{0\}$,即 $f(x)\leqslant f(x_0)-\beta d(x,x_0)\leqslant f(x_0)$。

故有 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)\leqslant\lambda^{\mathrm{T}}f(x_0)$,其中 $\lambda^{\mathrm{T}}e=1$。由 $\lambda^{\mathrm{T}}f$ 在 x_0 是Ⅰ型近似拟凸,则对任意 $c>0$,存在 x_0 的邻域 U_0,使得对任意 $x\in U_0\cap S$,$[\xi_1,x-x_0]-cd(x,x_0)\leqslant 0$, $\forall\xi_1\in\partial\lambda^{\mathrm{T}}f(x_0)$。由条件(1),取 $U=U_0$,$\xi_2\in\partial u^{\mathrm{T}}g(x_0)$ 和 $\xi_3\in\partial(\beta d(x,x_0))|_{x=x_0}$,结合上式有 $[\xi_2+\xi_3,x-x_0]+cd(x,x_0)\geqslant 0$。而由 $\xi_3\in\partial(\beta d(x,x_0))|_{x=x_0}$ 可得,$[\xi_3,x-x_0]\leqslant\beta d(x,x_0)$。因此 $[\xi_2,x-x_0]+\beta d(x,x_0)+cd(x,x_0)\geqslant 0$。

即 $[\xi_2,x-x_0]+\alpha d(x,x_0)\geqslant 0$,其中 $\alpha=\beta+c$。再由 $u^{\mathrm{T}}g$ 在 x_0 是Ⅱ型严格近似伪凸可得 $u^{\mathrm{T}}g(x)>u^{\mathrm{T}}g(x_0)$。

由条件(2)可得,$u^{\mathrm{T}}g(x)>0$,矛盾。故 x_0 是(VP)的局部拟有效解。

定理 5 设条件(1)-(3)在 $x_0\in S$,对 $\lambda\in R_+^p, u\in R_+^q$,满足下面的条件:

(i) $\lambda^{\mathrm{T}}f$ 在 x_0 是Ⅱ型严格近似拟凸;(ii) $u^{\mathrm{T}}g$ 在 x_0 是Ⅱ型严格近似伪凸,则 x_0 是 VP 的局部有效解。

证明:假设 x_0 不是(VP)的局部有效解,则对 x_0 的任意邻域 U,存在 $x\in U\cap S$ 使得 $f(x)\leqslant f(x_0)$,故有 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)\leqslant\lambda^{\mathrm{T}}f(x_0)<\lambda^{\mathrm{T}}f(x_0)+cd(x,x_0)$, $\forall c>0$。由条件(i)可得 $[\xi_1,x-x_0]\leqslant 0$, $\forall\xi_1\in\partial\lambda^{\mathrm{T}}f(x_0)$。再由(1),取 $\xi_2\in\partial(\sum_{j=1}^{q}u_jg_j)(x_0)$,$\xi_3\in\partial(\alpha d(x,x_0))|_{x=x_0}$,有 $[\xi_2+\xi_3,x-x_0]\geqslant 0$。类似于定理4的证明,可以导出矛盾,从而 x_0 是(VP)的局部有效解。

参考文献:

[1] WINKLER K. Characterizations of efficient points in convex vector optimization problems [J].Mathematical Methods of Operations Research, 2001(53): 205-214

[2] VAZQUEZ F G, JONGEN H T, SHIKHMAN V, Todorov M I. Criteria for effciency in vector optimization [J].Mathematical Methods of Operations Research, 2009(70): 35-46

[3] ZAFFARONI A. Degrees of efficiency and degrees of minimality [J].SIAM Journal on Control and Optimization, 2003(42): 1071-1086

[4] GUPTA A, MEHRA B, Bhatia D. Approximate convexity in vector optimization [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2006(74): 207-218

[5] BHATIA D, Gupta A, Arora P. Optimality via generalized approximate convexity and quasiefficiency [J]. Optimization Letters, DOI 10.1007/s11590-011-0402-3

[6] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth snalysis [M]. New York:Willey-Inteerscience,1983

[7] HANSON M A, MOND B. Necessary and sufficient conditions in constrained optimization [J].Mathematical. Programming, 1987(37): 51-58

(下转第 11 页)