文章编号:1672-058X(2013)07-0001-05

无可微性和凸性包含问题的误差界*

徐 述
(重庆警察学院 后勤处,重庆 401331)

摘 要:在 Banach 空间中建立了一类不需要可微性和凸性条件包含问题的局部 Lipschitz 误差界和全局 Lipschitz 误差界.这个结论可以用来研究一类向量优化问题的局部误差界和全局误差界.

关键词:Lipschitz 误差界;包含问题;度量正则;向量优化问题
中图分类号:O224 **文献标志码**:A

研究下列包含问题:

$$f(x) \in K \tag{1}$$

其中 $f:X\to Z$ 是一个向量值映射,X 和 Z 是两个巴拿赫空间且其范数都统一用符号 $\|\cdot\|$ 表示,K 是 Z 中的一个非空闭集. 令 $S=\{x:f(x)\in K\}$ 且在文中总是假设 $S\neq\varnothing$.如果存在 $\bar{x}$ 的某个邻域 U 和常数 $\alpha>0$,使得式(2)成立:

$$d(x,S) \leqslant \alpha d(f(x),K), \forall x \in U \tag{2}$$

称包含问题(1)在点 $\bar{x}\in S$ 具有局部 Lipschitz 误差界,其中对范数空间中的任意点到任意非空集合 A 的距离定义为 $d(y,A)=\inf\{\|y-a\|:a\in A\}$.如果 $U=X$,则称包含问题(1)具有全局误差界;称常数 α 为误差界常数;如果 $\alpha=\infty$,则称包含问题(1)不具有误差界;称满足不等式(2)的所有(α,U)中的 α 的下确界为精确误差界常数且记为 err f$(\bar{x})$.

当 $K=\{0\}$ 时,包含问题(1)退化为一个等式.对该等式问题的各种误差界在可微性的条件下已经被很多学者研究,如 Graves[1],Izmailov 和 Solodov[2] 及 Lyusternik[3].当 $K=R^m_-$ 和 $Z=R^m$ 且 $m\geqslant 1$ 时,包含问题(1)变为有限不等式组.对该不等式组的误差界在函数可微或不可微的情况都有讨论[4-12].当 K 是一个非空闭凸锥时,Robinson[13] 在一种约束品性和可微性条件下证明了式(2)是成立的.最近,利用其他的条件和方法,He 和 Sun[14] 讨论了不用于式(2)的两类误差界.当 K 是一个非空闭凸集时,Burke 和 Deng[15] 在可微和凸性条件下证明了式(2)是成立的.此外,对非光滑包含问题的误差界,许多学者如 He 和 Sun[16],Huang 和 Ng[17],Ng 和 Yang[18],Ng 和 Zheng[19-20],Wu 和 Ye[21-23] 及 Zheng[24] 等人都做了一些重要工作.

此处主要讨论包含问题(1)形如(2)的误差界,此时函数 f 不需要可微性和凸性条件,且 K 仅仅是一个非空闭集.文章将在第 2 部分介绍一些重要的概念和引理;在第 3 部分建立不需要可微性和凸性条件的局部误差界和全局误差界.

收稿日期:2013-03-22;**修回日期**:2013-04-18.
* **基金项目**:国家自然科学基金(11071267);重庆警察学院校级课题(JY20128001).
作者简介:徐述(1979-),男,重庆人,讲师,博士,从事最优化理论及应用.

1 预备知识

用 $B(x,r)$ 和 $\bar{B}(x,r)$ 分别表示以点 x 为球心,以 r 为半径的开球和闭球;用 B 和 $\bar{B}$ 分别表示开球和闭球. 令符号 0_X 和 0_Z 代表 X 和 Z 中的零元素. 设 $F:X\to 2^Z$ 是一个集值映射,其中 2^Z 表示 Z 中所有子集组成的集合. F 的有效域、图和逆分别记为

$$\operatorname{dom} F:=\{x\in X:F(x)\neq\varnothing\},\ \operatorname{gph} F:=\{(x,z)\in X\times Z:z\in F(x)\}$$
$$F^{-1}(z):=\{x\in X:z\in F(x)\}$$

设 $h:X\to Z$ 是一个向量值映射.

定义 1 给定点 $(\hat{x},\hat{z})\in\operatorname{gph} F$,如果存在常数 $k\geqslant 0$,$\hat{x}$ 的邻域 U 和 $\hat{z}$ 的邻域 W,使得

$$d(x,F^{-1}(z))\leqslant kd(z,F(x)),\forall x\in U,z\in W$$

成立,则称 F 在点 $(\hat{x},\hat{z})$ 是度量正则的. 称满足上述不等式的所有 (k,U,W) 中的 k 的下确界为 F 在点 $(\hat{x},\hat{z})$ 的精确度量正则常数且记为 $\operatorname{reg} F(\hat{x},\hat{z})$.

如果存在常数 $k\geqslant 0$ 使得下式(3)成立

$$d(x,F^{-1}(z))\leqslant kd(z,F(x)),\forall(x,z)\in X\times Z \tag{3}$$

则称 F 在 $X\times Z$ 上是度量正则的.

类似地,可以定义单值函数 $h:X\to Z$ 的度量正则且相应的常数记为 $\operatorname{reg} h(\hat{x})$.

下面回顾一个重要的引理. 此引理是命题 1[25]的一个特殊形式.

引理 1 设 $\bar{x}\in S$ 且 f 在点 $\bar{x}$ 是连续的,则 S 在点 $\bar{x}$ 具有局部 Lipschitz 误差界,即式(2)成立,当且仅当存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 和常数 $c>0$,使得式(4)成立

$$d(x,S)\leqslant\alpha d(f(x),K),\forall x\in U,d(f(x),K)<c \tag{4}$$

2 无可微性和凸性的包含问题的误差界

定理 1 设 $\bar{x}\in S$,假设(i) f 在点 $\bar{x}$ 是度量正则的;(ii) f 在点 $\bar{x}$ 是连续的. 则包含问题(1)在点 $\bar{x}$ 具有局部 Lipschitz 误差界,而且有 $\operatorname{err} f(\bar{x})\leqslant\operatorname{reg} f(\bar{x})$.

证明 根据引理 1,仅仅需要找到 $\bar{x}$ 的某个邻域 U,常数 $\alpha>0$ 和 $c>0$ 使得式(4)成立即可. 根据条件(i),存在常数 $\alpha>0$ 和 $\delta>0$ 使得(i)在邻域 $B(\bar{x},\delta)$ 上满足. 由(ii)知,存在常数 $\delta_1>0$,满足式(5)

$$\|f(x)-f(\bar{x})\|\leqslant\frac{\delta}{2},\forall x\in B(\bar{x},\delta_1) \tag{5}$$

取两个常数满足如下条件:

$$0<\delta_0<\min\{\delta,\delta_1\};0<c<\frac{\delta}{2}$$

对任意的 $x\in B(\bar{x},\delta_0)$ 且 $d(f(x),K)<c$,如果 $d(f(x),K)=0$,则根据 K 的闭知 $x\in S$,从而不需要证明. 下面考虑情形 $d(f(x),K)>0$. 对任意的 ε 满足 $0<\varepsilon<c-d(f(x),K)$,则存在 $z_\varepsilon\in K$ 使得 $\|f(x)-z_\varepsilon\|\leqslant d(f(x),K)+\varepsilon$. 因为

$$\|z_\varepsilon-f(\bar{x})\|\leqslant\|z_\varepsilon-f(x)\|+\|f(x)-f(\bar{x})\|<c+\frac{\delta}{2}<\delta$$

则结合(i)得 $d(x,f^{-1}(z_\varepsilon))\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|$.所以存在 $x_\varepsilon\in f^{-1}(z_\varepsilon)$(即 $z_\varepsilon=f(x_\varepsilon)$)使 $\|x-x_\varepsilon\|\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|+\varepsilon$. 而且有 $x_\varepsilon\in S$. 因此得

$$d(x,S)\leqslant\|x-x_\varepsilon\|\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|+\varepsilon\leqslant ad(f(x),K)+\varepsilon(a+1)$$

因为 ε 可以任意逼近 0, 所以包含问题(1)具有局部 Lipschitz 误差界,相关的精确误差界常数的上界容易得到.证毕.

注 1 下面这个例子说明了 f 的度量正则性质对定理 1 是本质的.令 $X=Z=R$, $f(x)=x^2$ 和 $K=\{0\}\cup[1,\infty)$,则有 $S=\{0\}\cup(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.令 $\bar{x}=0$,容易验证 f 在 $\bar{x}$ 点不是度量正则的.且明显地,包含问题(1)不具有局部 Lipschitz 误差界.

定理 2 令 $\bar{x}\in S$,假设 f 在 X 上是度量正则的,则包含问题(1)具有全局 Lipschitz 性质.

证明 令 $x\in X$,如果 $d(f(x),K)=0$,则根据 K 的闭性得 $x\in S$,从而不需要证明.下面考虑情形:$d(f(x),K)>0$.因为 K 非空,所以对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在 $z_\varepsilon\in K$,使得

$$\|f(x)-z_\varepsilon\|\leqslant d(f(x),K)+\varepsilon$$

因为

$$d(x,f^{-1}(z_\varepsilon))\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|$$

所以对上述 ε 存在 $x_\varepsilon\in f^{-1}(z_\varepsilon)$(即,$z_\varepsilon=f(x_\varepsilon)$)使得

$$\|x-x_\varepsilon\|\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|+\varepsilon$$

由于 $x_\varepsilon\in S$,所以得

$$d(x,S)\leqslant\|x-x_\varepsilon\|\leqslant a\|z_\varepsilon-f(x)\|+\varepsilon\leqslant ad(f(x),K)+\varepsilon(a+1)$$

因为 ε 可以任意逼近 0,包含问题(1)具有全局 Lipschitz 误差界.证毕.

下面回顾度量正则的一个充分条件.

引理 2[26] 令 $\bar{x}\in S$,给定一个满射线性连续算子 $A:X\to Z$,假设存在 $\bar{x}$ 的某个邻域 U,常数 $\mu\geqslant0$ 和 $\gamma>\operatorname{reg}A$ 满足

$$\mu\gamma<1;\ \|f(x)-f(x')-A(x-x')\|\leqslant\mu\|x-x'\|,\ \forall x,x'\in U \tag{6}$$

则 f 在点 $\bar{x}$ 是度量正则的,且有如下估计:

$$\operatorname{reg}f(\bar{x})\leqslant\frac{\operatorname{reg}A}{1-\mu\cdot\operatorname{reg}A}$$

注 2 f 的度量正则性质一般不蕴含公式(6).类似地,下面这个条件是 f 在 X 上的度量正则的充分条件:存在一个满射线性连续算子 $A:X\to Z$, 常数 $\mu\geqslant0$ 和 $\gamma>\operatorname{reg}A$ 满足 $\mu\gamma<1$ 及

$$\|f(x)-f(x')-A(x-x')\|\leqslant\mu\|x-x'\|,\ \forall x,x'\in X \tag{7}$$

根据定理 1,2 和引理 1 及注 2 很容易得到下面的结论.

推论 1 令 $\bar{x}\in S$,如果式(6)成立,则包含问题(1)具有局部 Lipschitz 性质,且相应的常数上界估计为 $\operatorname{err}\mathrm{f}(\bar{x})\leqslant\dfrac{\operatorname{reg}A}{1-\mu\cdot\operatorname{reg}A}$.如果式(7)成立,则包含问题(1)具有全局 Lipschitz 误差界.

注 3 (i)条件(6)的一个充分条件是严格可微性,容易从如下定义中看出.f 在点 $\bar{x}$ 是严格可微的且严格导数记为$\nabla f(\bar{x})$当且仅当 $\lim\limits_{\substack{(x,x')\to(\bar{x},\bar{x})\\ x\neq x'}}\dfrac{f(x)-f(x')-\nabla f(\bar{x})(x-x')}{\|x-x'\|}=0$, $\forall x,x'\in X$ 且在 $\hat{x}$ 的某个邻域内.

但是条件(6)一般不蕴含 f 的 Gateaux 可微性,Gateaux 可微性是比严格可微性更弱的一个条件.所以条件(6)一般不蕴含严格可微性,更不蕴含度量正则性质.令 $X=Z=R$, $\bar{x}=0$ 和 $f(x)=|x|$,容易验证条件(6)对

$A=\frac{1}{3}$和$\mu=2$成立.明显地,f在点$\bar{x}$不是 Gateaux 可微的.因此,此处的条件和方法不同于文献[13,15]中的条件和方法.

(ii) 在f关于K的回收锥K^{∞}是凸的条件下,Burke 和 Deng[5]已经研究了包含问题(1)的 Lipschitz 误差界(2),其中凸性假设和回收锥K^{∞}是:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)]\in K^{\infty},\forall x_1,x_2\in X \text{ 和 } \lambda\in[0,1]$$

$K^{\infty}:=\{d:x+d\in K\,\forall x\in K\}$.容易验证条件(4)一般不蕴含$f$的凸性.所以此处的结论和方法不同于 Burke 和 Deng[5].

(iii) 定理 1,2 和推论 1 可以应用到下列向量优化问题(简记为:VOP):

$$\min\nolimits_C f(x)\quad \text{s.t.},x\in X$$

其中$f:X\to Z$是一个向量值映射且$C\subset Z$是一个带有非空内部 int$C$的凸锥,用M表示可性值,即,$M:=\{f(x):x\in X\}$.令K_1和K_2分别是

$$K_1:=\min\nolimits_C M=\{z\in M:(M-z)\cap(-C)=\{0_Z\}\}$$

$$K_2:=\min\nolimits_{\mathrm{int}C} M=\{z\in M:(M-z)\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing\}$$

即K_1和K_2分别是(VOP)的最优值和弱最优值集合.用S_1和S_2分别表示(VOP)的有效解和弱有效解,则

$$S_1=\{x\in X:f(x)\in K_1\}\text{ 和 }S_2=\{x\in X:f(x)\in K_2\}$$

因此定理 1,2 和推论 1 可以应用到(VOP)的有效解和弱有效解集.但是,由于集合K_1和K_2一般既不是凸集也不是锥,所以文献[13-16,18,24]的结论一般不能应用到(VOP)上.

参考文献:

[1] GRAVES L M. Some mapping theorems[J]. Duke Math J, 1950(17):111-114

[2] IZMAILOV A F, SOLODOV M V. Error bounds for 2-regular mappings with Lipschitzian derivatives and their applications[J]. Math Program Ser A, 2001, 89(3):413-435

[3] LYUSTERNIK L A. On conditional extrema of functionals[J]. Mat Sbornik, 1934(41):390-401

[4] AUSLENDER A, TEBOULLE M. Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities[M]. New York: Springer, 2003

[5] BURKE J V, DENG S. Weak sharp minima revisited, part II: application to linear regularity and error bounds[J]. Math Program Ser B, 2005(104):235-261

[6] KLATTE D, LI W. Asymptotic constraint qualifications and global error bounds for convex inequalities[J]. Math Program Ser A, 1999,84(1):137-160

[7] LEWIS A S, Pang J-S. Error bounds for convex inequality systems[A]. In: Crouzeix, J. P., Martinez- Legaz, J.-E., Volle, M.(ed.) Proceedings of the Fifth International Symposium on Generalized Convexity held in Luminy June[C]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1998

[8] Li W. Abadie's constraint qualification, metric regularity and error bounds for differentiable convex inequalities[J]. SIAM J. Optim, 1997, 7(4):966-978

[9] MANGASARIAN O L. Error bounds for nondifferentiable convex inequalities under a strong Slater constraint qualification[J]. Math. Program, 1998(83):187-194

[10] NGAI H V, THERA M. Error bounds for convex differentiable inequality systems in Banach spaces[J]. Math. Program. Ser. B, 2005(104):465-482.

[11] PANG J S. Error bounds in mathematical programming[J]. Math Program Ser B, 1997(79):299-332

[12] ROBINSON S M. An application of error bounds for convex programming in a linear space[J]. SIAM J Control, 1975(13): 271-273

[13] ROBINSON S M. Stability theory for systems of inequalities. II. Differentiable nonlinear systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1976,

13(4):497-513

[14] HE Y R, SUN J. Error bounds for degenerate cone inclusion problems[J]. Math Oper Res, 2005,30(3):701-717

[15] BURKE J V, DENG S. Weak sharp minima revisited, Part III: error bounds for differentiable convex inclusions[J]. Math Program Ser B, 2009(116):37-56

[16] HE Y R, SUN J. Second order sufficient conditions for error bounds in Banach spaces[J]. SIAM J Optim, 2006,17(3):795-805.

[17] HUANG L R, NG K F. On first and second-order conditions for error bounds[J]. SIAM J Optim, 2004,14(4):1057-1073

[18] NG K F, YANG W H. Error bounds for abstract linear inequality systems[J]. SIAM J Optim, 2002,13(1):24-43

[19] NG K F, Zheng X Y. Global error bounds with fractional exponents[J]. Math Program Ser B, 2000,88(2):357-370

[20] NG K F, Zheng X Y. Error bounds for lower semicontinuous functions in normed spaces[J]. SIAM J Optim, 2001,12(1):1-17

[21] WU Z L, YE J J. Sufficient conditions for error bounds[J]. SIAM J Optim, 2001,12(2):421-435

[22] WU Z L, YE J J. On error bounds for lower semicontinuous functions[J]. Math Program Ser A, 2002,92(2):301-314

[23] WU Z L, YE J J. First-order and second-order conditions for error bounds[J]. SIAM J Optim, 2003,14(3):621-645

[24] ZHENG X Y, NG K F. Error bound moduli for conic convex systems on Banach spaces[J]. Math Oper Res, 2004,29(2):213-228

[25] LI M H, LI S J. Robinson metric regularity of parametric variational systems[J]. Nonlinear Anal, 2011(380):354-362

[26] ARTACHO F J A, MORDUKHOVICH B S. Enhanced metric regularity and Lipschitzian properties of variational systems[J]. J Global Optim, 2011(50):145-167

Error Bounds for Inclusions without Differentiability and Convexity

XU Shu

(Logistic Department, Chongqing Police College, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, a local Lipschitz error bound and a global Lipschitz error bound for an inclusion without differentiability and convexity are set up in Banach space. This result obtained can be applied to study local error bound and global error bound for a class of vector optimization problem.

Key words: Lipschitz error bound; inclusion; metric regularity; vector optimization problem

责任编辑:罗泽举
校　　对:李翠薇