文章编号:1672 -058X(2013)06 -0021 -03

全转置矩阵的特征值、特征向量和对角化

郭　华
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:给出了实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全转置矩阵 $\boldsymbol{A}^O$ 的定义,并研究了全转置正交矩阵 $\boldsymbol{A}^O$ 的特征值和特征向量的性质以及 $\boldsymbol{A}^O$ 的对角化问题.

关键词:全转置矩阵;特征值;特征向量;对角化

中图分类号:O151　　**文献标志码**:A

1　全转置矩阵及其引理

定义 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,将 $\boldsymbol{A}$ 顺时针(或逆时针)旋转 180°,得到的矩阵记为 $\boldsymbol{A}^O$,即 $\boldsymbol{A}^O=\begin{pmatrix} a_{mn} & a_{m,n-1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的全转置矩阵.

全转置矩阵有如下一些性质:

引理 1[1,2]　设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{m\times n}$,则下述结论成立:

(1) $\boldsymbol{I}^O=\boldsymbol{I},\boldsymbol{J}^O=\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}$.

(2) $\boldsymbol{A}^O=\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$.

(3) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵时 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^O=\boldsymbol{A}^O+\boldsymbol{B}^O$.

(4) λ 为常数时,$(\lambda\boldsymbol{A})^O=\lambda\boldsymbol{A}^O$.

(5) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$|\boldsymbol{A}^O|=|\boldsymbol{A}|$.

2　全转置矩阵的特征值与特征向量

定理 1　$\boldsymbol{A}^O$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

收稿日期:2012 -06 -28;**修回日期**:2012 -09 -11.

* **基金项目**:重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJ100726).

作者简介:郭华(1962-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

证明　用 $f_{A^O}(\lambda)$ 和 $f_A(\lambda)$ 分别表示 $\boldsymbol{A}^O$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,因 $f_{A^O}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^O|=|(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^O|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=f_A(\lambda)$. 所以 $\boldsymbol{A}^O$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

推论 1　$\boldsymbol{A}$ 为实对称正定矩阵,则 $\boldsymbol{A}^O$ 也是实对称正定矩阵.

证明　因 $\boldsymbol{A}^O=\boldsymbol{JAJ}$,$(\boldsymbol{A}^O)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{JAJ})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{JAJ}=\boldsymbol{A}^O$. 所以若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^O$ 也是实对称矩阵.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称正定矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值都大于零,而 $\boldsymbol{A}^O$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}^O$ 也是实对称正定矩阵.

定理 2　若 α 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{J}\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}^O$ 的属于 λ 的特征向量. 又若 α 是 $\boldsymbol{A}^O$ 的属于 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{J}\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

证明　因 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$,用 $\boldsymbol{J}$ 矩阵左乘两端得 $\boldsymbol{JA}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,即 $\boldsymbol{JAJJ}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,又 $\boldsymbol{JAJ}=\boldsymbol{A}^O$,于是得 $\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,$\boldsymbol{J}\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}^O$ 的属于 λ 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}^O\alpha=\lambda\alpha$,即是 $\boldsymbol{JAJ}\alpha=\lambda\alpha$,用 $\boldsymbol{J}$ 矩阵左乘两端得 $\boldsymbol{AJ}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,$\boldsymbol{J}\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

推论 2 设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,若 α 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量,k 为常数,m 为正整数. 则

(1) $k\boldsymbol{A}^O(\boldsymbol{A}^O)^m$,$f(\boldsymbol{A}^O)=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}^O+\cdots+a_m(\boldsymbol{A}^O)^m$ 的特征值依次为 $k\lambda,\lambda^m,f(\lambda)$,相应的特征向量都为 $\boldsymbol{J}\alpha$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,$\boldsymbol{A}^O$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^O)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^O$ 特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$,相应的特征向量为 $\boldsymbol{J}\alpha$,$(\boldsymbol{A}^O)^*=(\boldsymbol{A}^*)^O$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$,相应的特征向量为 $\boldsymbol{J}\alpha$.

(3) 对任意 n 阶可逆阵 P,$P^{-1}\boldsymbol{A}^OP$ 的特征值为 λ,相应的特征向量 $P^{-1}\boldsymbol{J}\alpha$.

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$,则有 $\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,$\Rightarrow k\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=k\lambda\boldsymbol{J}\alpha$.

又 $(\boldsymbol{A}^O)^m\boldsymbol{J}\alpha=(\boldsymbol{A}^O)^{m-1}\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda(\boldsymbol{A}^O)^{m-1}\boldsymbol{J}\alpha=\lambda(\boldsymbol{A}^O)^{m-2}\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda^2(\boldsymbol{A}^O)^{m-2}\boldsymbol{J}\alpha=\cdots=\lambda^m\boldsymbol{J}\alpha$. 又 $f(\boldsymbol{A}^O)\boldsymbol{J}\alpha=[a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}^O+\cdots+a_m(\boldsymbol{A}^O)^m]\boldsymbol{J}\alpha=a_0\boldsymbol{IJ}\alpha+a_1\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha+\cdots+a_m(\boldsymbol{A}^O)^m\boldsymbol{J}\alpha=a_0\boldsymbol{J}\alpha+a_1\lambda\boldsymbol{J}\alpha+\cdots+a_m\lambda^m\boldsymbol{J}\alpha=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)\boldsymbol{J}\alpha=f(\lambda)\boldsymbol{J}\alpha$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^O$ 有相同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^O$ 可逆. 又由 $\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,得 $\boldsymbol{J}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha$,两端用 $(\boldsymbol{A}^O)^{-1}$ 左乘,得 $(\boldsymbol{A}^O)^{-1}\boldsymbol{J}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}(\boldsymbol{A}^O)^{-1}\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{J}\alpha$. 又 $(\boldsymbol{A}^O)*\boldsymbol{J}\alpha=|\boldsymbol{A}^O|(\boldsymbol{A}^O)^{-1}\boldsymbol{J}\alpha=|\boldsymbol{A}|\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{J}\alpha$.

(3) $(P^{-1}\boldsymbol{A}^OP)(P^{-1}\boldsymbol{J}\alpha)=P^{-1}\boldsymbol{A}^O\boldsymbol{J}\alpha=\lambda P^{-1}\boldsymbol{J}\alpha$.

定理 3　当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时,$\boldsymbol{A}^O$ 的不同特征值下的特征向量彼此正交.

证明　设 $\boldsymbol{A}^O\alpha=\lambda\alpha$,$\boldsymbol{A}^O\beta=\mu\beta$,且 $\lambda\neq\mu$. 由定理 2 可知 $\boldsymbol{AJ}\alpha=\lambda\boldsymbol{J}\alpha$,$\boldsymbol{AJ}\beta=\mu\boldsymbol{J}\beta$,则 $\boldsymbol{J}\alpha$ 与 $\boldsymbol{J}\beta$ 是实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值下的特征向量,它们内积应为零,即 $(\boldsymbol{J}\alpha)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\beta)=0$. 从而 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JJ}\beta=(\boldsymbol{J}\alpha)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\beta)=0$,$\alpha,\beta$ 正交.

3　$\boldsymbol{A}^O$ 的对角化问题

定理 4　$\boldsymbol{A}^O$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证明　设 $\boldsymbol{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,由定理 2,$\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n$ 就是 $\boldsymbol{A}^O$ 的 n 个特征向量.

又如有数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使 $k_1\boldsymbol{J}\alpha_1+k_2\boldsymbol{J}\alpha_2+\cdots+k_n\boldsymbol{J}\alpha_n=0$,两端用 $\boldsymbol{J}$ 去左乘,得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$,由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,所以 $\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n$ 线性无关. $\boldsymbol{A}^O$ 有 n 个线性无关的

特征向量,可以对角化.

定理 5　$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时,存在正交的相似变换矩阵 Q,使 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{O}Q=\Lambda$,$\Lambda$ 为对角阵.

证明　$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 存在 n 个两两正交的单位特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,对应的 $\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n$ 就是 $\boldsymbol{A}^{O}$的特征向量,由定理 3 知它们两两正交的,因为 $\|\boldsymbol{J}\alpha_i\|^2=(\boldsymbol{J}\alpha_i,\boldsymbol{J}\alpha_i)=(\boldsymbol{J}\alpha_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\alpha_i)=\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\alpha_i=\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=\|\alpha_i\|^2=1$,于是 $\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n$ 就是 $\boldsymbol{A}^{O}$的两两正交的单位特征向量,令 $Q=(\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n)$,则 Q 为正交矩阵,且有 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{O}Q=Q^{-1}\boldsymbol{A}Q=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}^{O}$的对应于 $\boldsymbol{J}\alpha_1,\boldsymbol{J}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{J}\alpha_n$ 的特征值.

参考文献:

[1] 许永平. 旋转矩阵的一些概念与一些结论[J]. 江苏广播大学学报,1997(2):81-84

[2] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与 O-正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005(2):2-4

[3] 周素琴. 2-旋转矩阵及其性质[J]. 上海师范大学学报:自然科学版,2001(1):89-91

[4] 袁晖坪. 次正交矩阵与次对称矩阵[J]. 西南大学学报:自然科学版,1998(2):147-150

[5] 郭伟. 实次规范阵与次正交阵的进一步拓广[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(3):240-242

The Characteristic Value, Characteristic Vector and Diagonalization of the Full-transposed Matrix

GUO Hua

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The definition of the full-transposed matrix $\boldsymbol{A}^{O}$ of matrix $\boldsymbol{A}$ is given, the properties of the characteristic value and characteristic vector of the full-transposed matrix and the diagonalization $\boldsymbol{A}^{O}$ are studied.

Key words: full-transposed matrix; characteristic value; characteristic vector; diagonalization

责任编辑:李翠薇