文章编号:1672-058X(2013)06-0016-05

工序完成时间不确定的统筹图分析

郑 文
(重庆电子工程职业学院 通识教育学院,重庆 401331)

摘 要:作为一项较复杂的工程项目,其每道工序的完工时间常常是不确定的,文章利用β分布、正态分布对较复杂的工程项目作出科学合理的分析,结合统筹图找出工程项目的关键路线,并以较大的概率保证整个工程完工时间的合理性.文章的研究对较复杂工程项目的管理具有科学的指导意义.

关键词:工序;β分布;正态分布;统筹图;完工时间
中图分类号:G718 **文献标志码**:A

0 引 言

统筹法是一种基于任务总进度的组织管理技术.它把一项复杂的任务分解为许多作业(工序),建立网络图进行定量的分析,找出关键路线和时差,从而对时间和资源进行合理的计划和协调,以保证按期或提前完成任务.对于每一道工序若完成的时间一定,很容易利用统筹法确定出最早完工时间和最迟完工时间,找出关键路线和时差.但在实际问题中,常常遇到的是完成工序的时间是不确定的,此处借助β分布、正态分布对如何利用统筹法确定完成项目时间作出科学合理的分析.

1 完成工序所需时间不确定的网络时间与关键路线的分析

对于一个较复杂的工程项目,虽然不能确定每道工序的完工时间,但是根据经验,可以估计出最早完工时间(乐观时间),最有可能完工时间(最可能时间),最迟完工时间(悲观时间).用统筹法来解决实际问题时,必须先要确定出各工序的完工时间,但现在面临的问题是完成工序所需的时间是不确定的,是一随机变量,所以必须根据工序所反映的信息来估算完成该工序的时间.

假设有一道工序 w,经估计完成它乐观时间是a,最可能时间是m,悲观时间是b;很显然,完成工序 w 所需的时间η是一随机变量.为了估算出完成工序 w 的时间,根据经验,可假设η大致呈右偏分布,可近似用β分布来描述它[1],如图1所示.

这样就可用如下公式来估算出完成工序的平均时间和方差:

$$T = E(\eta) = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{1}$$

收稿日期:2013-01-22;**修回日期**:2013-03-08.
* **基金项目**:重庆市高等教育教学改革研究项目资助(103433).
作者简介:郑文(1966-),男,重庆长寿人,副教授,从事数学建模的教学与研究.

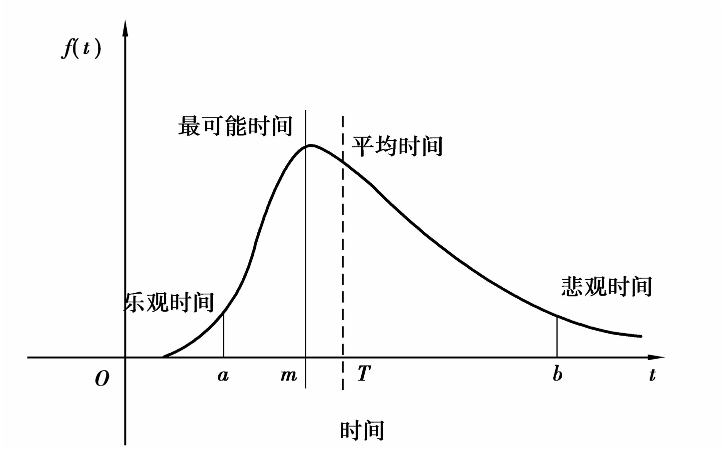

图 1　活动完工时间概率分布

$$\sigma^2 = D(\eta) = (\frac{b-a}{6})^2 \tag{2}$$

可利用统筹法找出关键路线. 设关键路线上的完工时间和方差分别为 $T_1, T_2, \cdots, T_k$;$o_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2$,则完成该项目的平均时间为

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$$

方差为

$$\sigma^2 = o_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2$$

由中心极限定理可知,完成整个工程项目的时间 ζ 应服从正态分布 $\xi \sim N(T, \sigma^2)$[2],用此分布就可对整个工程项目的完工时间作概率分析.

2　案例分析

设有一工程项目的统筹图,如图 2 所示。

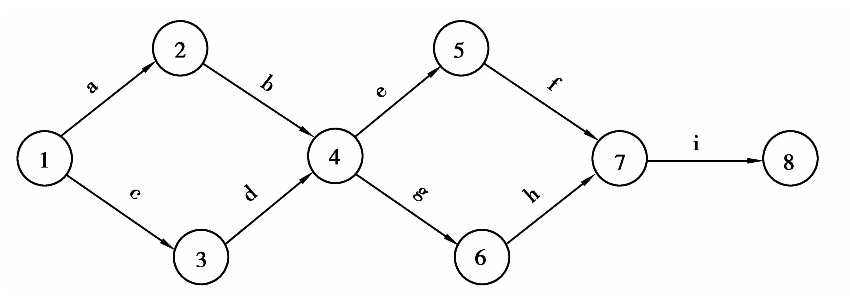

图 2　统筹图

由于缺乏经验,很难确定各工序的完工时间,但通过调查与研究,对完成每个工序(活动)的时间作了 3 种统计:乐观时间、最可能时间和悲观时间(表 1).

表1 乐观时间、最可能时间和悲观时间 单位:周

活动	乐观时间	最可能时间	悲观时间
a	1.5	2.0	2.5
b	2.0	2.5	6.0
c	1.0	2.0	3.0
d	1.5	2.0	2.5
e	0.5	1.0	1.5
f	1.0	2.0	3.0
g	3.0	3.5	7.0
h	3.0	4.0	5.0
i	1.5	2.0	2.5

要求编制出完成该工程项目的计划表及完成该工程项目的大致时间、关键路线,并要求对完成该工程项目的时间作概率分析,以保证工程的如期完成.

此问题分析如下:

(1) 由公式(1)(2)可估算出完成每个工序所需的平均时间和方差,如表2所示.

表2 完工的平均时间和方差

活动	平均时间 T	方差 σ^2	活动	平均时间 T	方差 σ^2
a	2	0.028	f	2	0.111
b	3	0.445	g	4	0.445
c	2	0.111	h	4	0.111
d	2	0.028	i	2	0.028
e	1	0.028			

(2) 用完成工序(活动)所需平均时间代替完成该工序所需时间,画出统筹图,如图3所示.

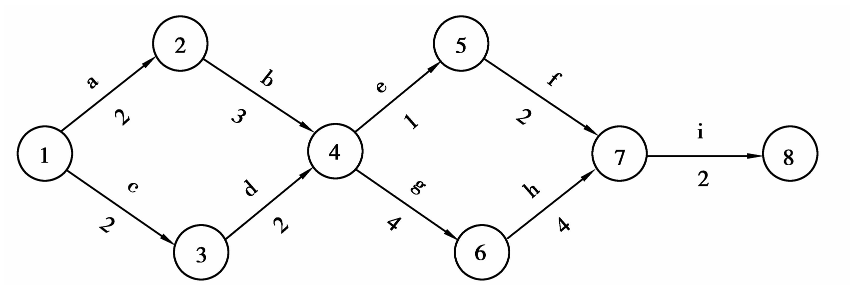

图3 统筹图

(3) 计算最早开始时间和最早结束时间.

设一工序最早开始时间(ES)和最早结束时间(EF),完成该工序的时间为 t,则对同一工序有 $EF = ES + t$ [3],开始时 $ES = 0$.

由于任一工序只有当其所有的紧前工序结束之后才能开始,所以任一工序的最早开始时间应该等于其所有紧前工序最早结束时间中的最后时间,称之为最早开始时间法则,应用这个法则和关系 $EF = ES + t$,可依次计算出网络图中各弧的最早开始时间和最早结束时间,将[ES,EF]标在对应弧的上边. 如图4所示.

(4) 计算最晚开始时间和最晚结束时间.

设一工序最晚开始时间(LS)和最晚结束时间(LF),完成该工序的时间为 t,则对同一工序有 $LS = LF - t$[3]. 对最后一道工序有 $EF = LF$,这才能保证整个工程在最短的时间内完成.

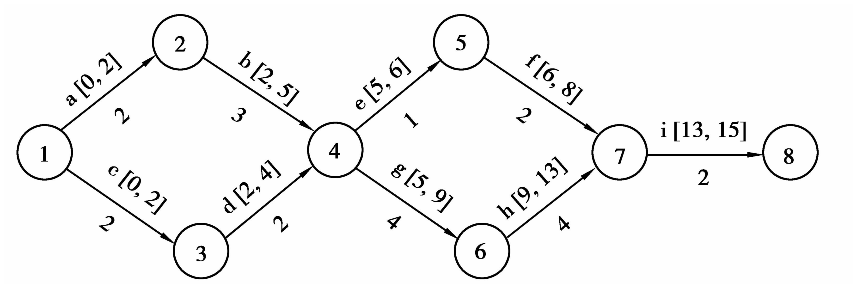

图 4　统筹图

由于任一工序必须在其所有的紧后工序开始之前结束,所以在不影响整个工程最早结束时间的情况下,任一工序的最晚结束时间应等于其所有紧后工序的最晚开始时间中的最早时间,称之为最晚结束时间法则,应用这个法则和关系 $LS = LF - t$,可依次计算出网络图中各弧的最晚开始时间和最晚结束时间,将 $[LS, LF]$ 标在对应弧的下边,如图 5 所示.

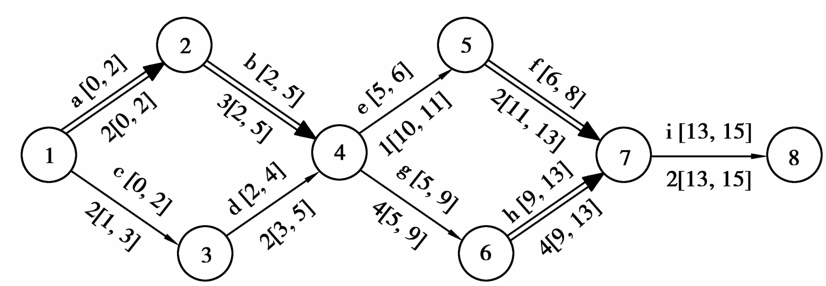

图 5　统筹图

(5) 确定关键路线.

先计算时差,在不影响整个工程最早结束的条件下,工序最早开始(或结束)的时间可以推迟的时间,称为该工序的时差,记为 T_s,有 $T_s = LS - ES = LF - EF$. 利用此公式计算出各道工序的时差,如下:

$$a: T_s = 0 \quad b: T_s = 0 \quad c: T_s = 1 \quad d: T_s = 1 \quad e: T_s = 5$$

$$f: T_s = 5 \quad g: T_s = 0 \quad h: T_s = 0 \quad i: T_s = 0$$

然后确定关键路线. 时差为零的工序称为关键工序,关键工序的提前与推迟开始,都会使整个工程最早结束时间提前与推迟;关键工序的延工必将影响到整个工程的完工,关键工序(或时差为零的工序)构成的线路即为关键路线. 该工程项目的关键路线是:$a \to b \to g \to h \to i$,即图 5 中双箭头所示.

(6) 列出工序的时间表.

由图 5 可得到工序时间表,如表 3 所示.

表 3　工序时间表

工序	最早开工时间	最早完成时间	最迟开工时间	最迟完成时间	时差	关键工序
a	0	2	0	2	0	是
b	2	5	2	5	0	是
c	0	2	1	3	1	否
d	2	4	3	5	1	否
e	5	6	10	11	5	否
f	6	8	11	13	5	否
g	5	9	5	9	0	是
h	9	13	9	13	0	是
i	13	15	13	15	0	是

由图5和表3,可得出完成整个项目所需的时间约为:

$$T = T_a + T_b + T_g + T_h + T_i = 2 + 3 + 4 + 4 + 2 = 15(\text{周})$$

(7) 对整个工程项目的完工时间作概率分析.

由前面的分析可知,整个工程的完工时间应服从正态分布,即 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$.

$$\mu = E(\xi) = T_a + T_b + T_g + T_h + T_i = 2 + 3 + 4 + 4 + 2 = 15$$

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_g^2 + \sigma_h^2 + \sigma_i^2 =$$

$$0.028 + 0.445 + 0.445 + 0.111 + 0.028 \approx 1.025^2$$

所以,完成该项目的时间 ξ 服从以均值为15,方差为 1.025^2 的正态分布,即 $\xi \sim N(15,1.025^2)$.

分析如下一些问题:在14周到16周之间完工的概率有多大? 若要求保证以99%的概率完成该工程,其完工时间应为多少周?

分析如下:

$$P(14 \leqslant \xi \leqslant 16) = \Phi\left(\frac{16-15}{1.025}\right) - \Phi\left(\frac{14-15}{1.025}\right) =$$

$$\Phi(0.9756) - \Phi(-0.9756) = 2\Phi(0.9756) - 1 =$$

$$2 \times 0.9365 - 1 = 0.8730$$

即在14周到16周之间完工的概率是0.8730.

因为 $P(\xi \leqslant T) = 0.99$,所以

$$\Phi\left(\frac{T-15}{1.025}\right) = 0.99 = \Phi(2.33)$$

$$\frac{T-15}{1.025} = 2.33, T = 2.33 \times 1.025 + 15 = 17.39(\text{周})$$

即要求保证以99%的概率完工,其完工时间应为17.39周.

这样,就能做到较完整地把握整个工程项目,实现对工程项目的科学管理,制定出较合理的计划方案. 为了使工程进度与资源都得到合理安排,建议采取以下一些做法:优先安排关键工序所需要的资源;利用非关键工序的时差,错开各工序的开始时间,拉平资源需要量的高峰;要统筹兼顾工程进度的要求和现有资源的限制,往往需要经过多次综合平衡,才能得到比较合理的计划方案.

3 结束语

在一些大型或较复杂的工程项目中,其各道工序完工的时间常常不确定,工序完工时间将呈现概率分布;其分布情况大致有3种:右偏分布、对称分布、左偏分布,而其中又以右偏分布常见. 应根据不同的情况来估算各工序完工的平均时间和方差,然后利用统筹图来确定关键路线,并估算出该工程的完工时间 ξ,根据中心极限定理,工程的完工时间 ξ 应服从正态分布,因此可利用正态分布对整个工程的完工时间作概率分析;从而能为管理者编制计划,安排进度提供科学的依据,以实现对整个工程项目进行有力的控制和科学的管理.

参考文献:

[1] 周概容. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,1983

[2] 宋明珠. 关于条件概率及其应用教学方法的研究[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2013(1):31-34

[3] 韩伯棠. 管理运筹学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2007

(下转第28页)