文章编号:1672 -058X(2013)06 -0011 -05

双 Poisson 风险模型下 Gerber-Shiu 函数及测度变换的研究

李 平
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:在轻尾假设下,对保险公司盈余离散模型的期望折现罚金函数进行了研究. 通过构造指数鞅,定义了新的测度. 利用测度变换公式,消去了折现,得到新的期望折现罚金函数,简化了表达式,并且得到了其满足的更新方程. 通过新测度下的期望折现罚金函数,得到 Lundberg 不等式;并利用测度变换,使得新测度下破产的发生变得确定,更新方程将简化为一般更新方程;进而利用关键更新定理,得到了当初始资本趋于无穷大时,期望折现罚金函数的渐进性;最后对于个体索赔额服从指数分布的特殊情况,导出其破产概率公式的显示表达式.

关键词:双 Poisson 风险模型;Gerber-Shiu 函数;测度变换
中图分类号:O211.6 **文献标志码:**A

Schmidli. H. (2010 年) [1] 对复合 Poisson 风险模型等连续型风险模型的 Gerber-Shiu 函数(Gerber. H. U. &Shiu. E. S. W. 1998 年提出)[2] 的测度变换进行了研究,此处将在此基础上进一步考虑离散型风险模型,针对双 Poisson 风险模型下 Gerber-Shiu 函数的测度变换进行了研究. 而事实上,离散风险模型更贴近实际情况,因此此处对离散模型的进一步研究更具有实际意义. 通过对离散风险模型的 Gerber-Shiu 函数的研究,对研究保险公司的破产概率有很大帮助,有利于保险公司的稳定和管理.

1 双 Poisson 风险模型简介

在完备概率空间(Ω,Γ,P)上考虑盈余过程(Bao 2006)[3]:

$$C(t) = u + cM(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geqslant 0$$

其中,$M(t)$表示时刻 t 保单到达总数,服从参数为 $\lambda_2 t$ 的 Poisson 过程;$N(t)$表示时刻 t 发生理赔的总次数,服从参数为 $\lambda_1 t$ 的 Poisson 过程;$\{M(t)\}$与$\{N(t)\}$独立,过程$\{C(t);t\geqslant 0\}$称为双 Poisson 风险模型;$\{Y_i\}$为第 i 次理赔额,且 Y_i 独立同分布,其共同分布为 $G(y)$,概率密度为 $g(y)$,均值 $\mu = E(Y) < \infty$;记 $M_Y(r) = E(e^{rY})$,为其矩母函数;记 r_∞ 为矩母函数存在的右端点,即有当 $r < r_\infty$,则 $M_Y(r) < \infty$,当 $r > r_\infty$,则 $M_Y(r) = \infty$,且$\{Y_i\}$与$\{M(t)\}\{N(t)\}$独立;u 为初始资产;c 为保费率(不失一般性,后文假设 $c = 1$);记$\{T_n\}$为第 n 索赔发生的时刻,T 为两次索赔发生时间间隔的一般变量,其分布为 F_1;记保费到达时间间

收稿日期:2013 -03 -01;**修回日期:**2013 -03 -19.

作者简介:李平(1987-),女,重庆沙坪坝人,硕士研究生,从事风险理论与精算模型研究.

隔变量的分布函数为 F_2. 为保证保险公司稳定经营,定义净盈利条件 $c\lambda_2 > \mu\lambda_1$,运用强大数定律,有 $\lim_{t\to\infty} C(t) = +\infty$.

2 主要结论

引理 1 对盈利过程 $\{V(t) = M(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i; t \geqslant 0\}$,存在函数 $\theta(r) = \lambda_2(\mathrm{e}^{-r} - 1) + \lambda_1(M_Y[r] - 1)$,使得 $E[\mathrm{e}^{-rV(t)}] = \mathrm{e}^{\theta(r)t}$. 方程 $\theta(r) = 0$ 存在唯一的正根 R,称为调节系数.

证明

$$\theta(0) = \lambda_2(\mathrm{e}^0 - 1) + \lambda_1(E[\mathrm{e}^0] - 1) = 0 \tag{1}$$

且有

$$\theta(r)' = -\lambda_2\mathrm{e}^{-r} + \lambda_1 E[Y\mathrm{e}^{rY}], \theta(r)'' = \lambda_2\mathrm{e}^{-r} + \lambda_1 E[Y^2\mathrm{e}^{rY}] > 0 \tag{2}$$

因此 $\theta(r)$ 为严格凸函数,因而方程至多有两个解,解 $r=0$ 是平凡的. 由 $|\theta(r)'|_{r=0} = -\lambda_2 + \mu\lambda_1 < 0$,且当 $r\to\infty$ 时,$\theta(r)'$ 趋向于 ∞,故方程必有一个非平凡解,记为 R,即方程 $\theta(r) = 0$ 存在唯一正根 R.

引理 2 $L_t^{(r)} = \mathrm{e}^{\{-t\theta(r) - r(C(t) - u)\}}$ 是一个鞅.

证明
$$\begin{aligned}E[\mathrm{e}^{\{-t\theta(r) - r(C(t) - u)\}}] &= E[\exp\{-t\theta(r) - rM(t) + r\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\}] = \\ &\exp\{-t\theta(r)\}\exp\{\lambda_2 t(\mathrm{e}^{-r} - 1)\}\exp\{\lambda_1 t(M_Y - 1)\} = \\ &\exp\{-\lambda_2 t(\mathrm{e}^{-r} - 1) - \lambda_1 t(M_Y[r] - 1)\}\exp\{\lambda_2 t(\mathrm{e}^{-r} - 1)\} \\ &\exp\{\lambda_1 t(M_Y[r] - 1)\} = 1\end{aligned} \tag{3}$$

由此定义一个新的测度:

$$P^{(r)}[A] = E[L_t^{(r)}:A]: = E[L_t^{(r)} I_A] = \int_A L_t^{(r)}(w)\mathrm{d}P(w), A \in \Gamma_t \tag{4}$$

由鞅的性质,$P^{(r)}$ 独立于 t. 此外,这个测度可以被扩展到整个 δ 代数 f,因为没有完备的 $\{f_t\}$. 由可选抽样原理,测度变换原则 $P^{(r)}[A] = E[L_n^{(r)}:A]$ 也适于停时 τ,即有 $P^{(r)}[A] = E[L_\tau^{(r)}:A]$ 仍然成立.

引理 3 在新测度 $P^{(r)}$ 下,$\{C(t); t\geqslant 0\}$ 仍然是一个双 Poisson 风险过程,其中理赔额分布为:$\mathrm{d}G^{(r)}(y) = M_T[-\theta(r) + \lambda_2(\mathrm{e}^{-r} - 1)]\mathrm{e}^{ry}\mathrm{d}G(y)$;理赔时间间隔为:$\mathrm{d}F_1^{(r)}(t) = M_Y(r)\mathrm{e}^{\{-\theta(r)t - rM(t)\}}\mathrm{d}F_1(t)$,即有 $\widetilde{\lambda}_1 = M_Y(r)\lambda_1$;保费时间间隔为:$\mathrm{d}F_2^{(r)}(t) = M_Y(r)\mathrm{e}^{\{-\theta(r)t - rM(t)\}}\mathrm{d}F_2(t)$,即有 $\widetilde{\lambda}_2 = M_Y(r)\lambda_2$.

证明
$$\begin{aligned}G^{(r)}(y) &= E[L_t^r I(Y < y)] = \int_0^\infty\int_0^y L_t^r \mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F_1(t) = \\ &\int_0^\infty\int_0^y \exp\{-\theta(r)t - r(M(t) - \sum_{k=i}^{N(t)} Y_k)\}\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F_1(t) = \\ &\int_0^\infty\int_0^y \exp\{-\theta(r)t_1 - r(M(t_1) - Y_1)\}\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F_1(t_1) = \\ &\int_0^\infty \mathrm{e}^{\{-\theta(r)t_1 - rM(t_1)\}}\mathrm{d}F_1(t_1)\int_0^y \mathrm{e}^{rY} dG(y) = \\ &M_T[-\theta(r) + \lambda_2(\mathrm{e}^{-r} - 1)]\int_0^y \mathrm{e}^{rY}\mathrm{d}G(y)\end{aligned}$$

因此有:$\mathrm{d}G^{(r)}(y) = M_T[-\theta(r) + \lambda_2(\mathrm{e}^{-r} - 1)]\mathrm{e}^{ry}\mathrm{d}G(y)$. 同理得到:$\mathrm{d}F_1^{(r)}(t) = M_Y(r)\mathrm{e}^{\{-\theta(r)t - rM(t)\}}\mathrm{d}F_1(t)$. 则有:

$$\widetilde{\lambda}_1\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_1 t} = M_Y(r)\mathrm{e}^{\{-\theta(r)t - rM(t)\}}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} =$$

$$M_Y(r)\lambda_1 e^{-\{\theta(r)-\lambda_2(e^r-1)+\lambda_1\}t} =$$
$$M_T^{-1}[\theta(r)-\lambda_2(e^r-1)]\lambda_1 e^{-\{\theta(r)-\lambda_2(e^r-1)+\lambda_1\}t} =$$
$$\frac{\lambda_1-\theta(r)+\lambda_2(e^r-1)}{\lambda_1}\lambda_1 e^{-\{\theta(r)-\lambda_2(e^r-1)+\lambda_1\}t} =$$
$$(\lambda_1-\theta(r)+\lambda_2(e^r-1))e^{-\{\theta(r)-\lambda_2(e^r-1)+\lambda_1\}t}$$

因此$\tilde{\lambda}_1 = M_Y(r)\lambda_1$.

同理 $dF_2^{(r)}(t) = M_Y(r)e^{\{-\theta(r)t-rM(t)\}}dF_2(t)$，即$\tilde{\lambda}_2 = M_Y(r)\lambda_2$.

此时考虑测度 $P^{(r)}$ 下，盈余过程$\{C(t);t\geqslant 0\}$的漂移系数. 可以计算得到 $E_u^{(r)}[C(t)-u] = -\theta'(r)t$，即$\{C(t);t\geqslant 0\}$的漂移为 $-\theta'(r)$. 令 $\alpha_m = \inf\{\theta(r):r<r_\infty\}$，$r_m$ 为取到下界时 r 的值. 则由 $\theta(r)$的性质，当$\theta(\rho)=\alpha$ 时，$-\theta'(r)<0$，即破产一定会发生. 这表明如果 $r\geqslant r_m$，则 $P_u^{(r)}[\tau<\infty]=1$.

引理 4　假设存在 $r>r_m$，使得 $M_Y(r)<\infty$. 对任意的 $\alpha<\alpha_m$，有 $E_u[e^{-\alpha\tau}]=\infty$.

证明　通过测度变换公式，对 $r=r_m$，有：

$$E_u[e^{-\alpha\tau}] = E_u^{(r)}[e^{-\alpha\tau}(L_\tau^{(r)})^{-1}] =$$
$$E_u^{(r)}[e^{-\alpha\tau}e^{(\tau\theta(r)+r(C(\tau)-u))}] =$$
$$E_u^{(r)}[e^{(\theta(r)-\alpha)\tau}e^{rC(\tau)}]e^{-ru} =$$
$$E_u^{(r)}[e^{(\alpha_m-\alpha)\tau}e^{rC(\tau)}]e^{-ru}$$

通过 Jensen 不等式，得到 $E_u^{(r)}[e^{rC(\tau)}e^{(\alpha_m-\alpha)\tau}]e^{-ru}\geqslant \exp\{rE_u^{(r)}[C(\tau)]+(\alpha_m-\alpha)E_u^{(r)}[\tau]\}$.

在 $P^{(r)}$下，因为 Y 的指数矩存在，由随机游走理论，得到 $E_u^{(r)}[C_n]>-\infty$. 由 Rolski. T. et al. (1999)[4]，$E_u^{(r)}[\tau]=\infty$，由此引理 4 得证.

在测度 $P^{(r)}$下，由测度变换公式可以得到 Gerber-Shiu 函数的表达式为：

$$f_{\alpha,w}(u) = E_u[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{-\alpha\tau}:\tau<\infty] =$$
$$E_u^{(r)}[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{-\alpha\tau}(L_\tau^{(r)})^{-1}:\tau<\infty] =$$
$$E_u^{(r)}[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{rC(\tau)}e^{(\theta(r)-\alpha)\tau}:\tau<\infty]e^{-ru}$$

如果选择 r 满足 $\theta(r)=\alpha$，则对 τ 的明确相依消失了. 假设存在$\rho\in(r_m,r_\infty)$使得 $\theta(r)=\alpha$，由其凸性，如果它存在，其解是唯一的. 因为在 $P^{(\rho)}$下，对破产发生几乎确定，则有：$f_{a,w}(u) = E_u^{(\rho)}[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{\rho C(\tau)}]e^{-\rho u}$.

定理 1　双 Poisson 过程破产概率的 Lundberg 上界 $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$.

证明　由 $f_{a,w}(u) = E_u^{(\rho)}[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{\rho C(\tau)}]e^{-\rho u}$式，立即可得 $f_{a,w}(u)\leqslant \sup_{x,y}w(x,y)e^{-\rho u}$. 由 Gerber-Shiu 函数的定义可知，当 $w(x,y)=1$ 且 $\alpha=0$ 时，$f_{\alpha,w}(u)=\psi(u)$. 由引理 1 知 $\alpha=0$ 的解，即为调节系数 R，则有：$\psi(u)\leqslant \sup_{x,y}w(x,y)e^{-\rho u}\leqslant e^{-\rho u}=e^{-Ru}$.

定理 2　假设 $\alpha\geqslant\alpha_m$，记 $\rho\geqslant r_m$ 是方程 $\theta(\rho)=\alpha$ 的最大解，并假设 $\rho<r_\infty$，则存在一个常数 C 使得 $\lim\limits_{u\to\infty} f_{a,w}(u)e^{\rho u}=c$.

证明　令$\tilde{f}_{a,w}(u) = E_u^{(\rho)}[w(C(\tau-),-C(\tau))e^{\rho C(\tau)}]$，以及在测度$P^{(r)}$下，初始盈余为零时，破产前瞬时盈余与破产赤字的联合分布为 $B(x,y) = P_0^{(\rho)}[C(\tau-)\leqslant x,-C(\tau)\leqslant y]$. 则有：

$$\tilde{f}_{a,w}(u) = \sum_{y=0}^{u}\tilde{f}_{a,w}(u-y)B(\infty,dy) + \sum_{y=u}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}w(x+u,y-u)e^{-\rho(y-u)}B(dx,dy) \tag{5}$$

则需要证明第 2 项是黎曼直接积分. 由于函数 $w(x,y)$ 有界，且 $-\rho(y-u)<0$，则只需证$\int_{y=u}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}B(dx,dy)$ 黎

曼直接可积. 又有$\int_{y=u}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}B(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\int_{y=u}^{\infty}B(\infty,\mathrm{d}y)=1-B(\infty,u)$. 令$a(u)=1-B(\infty,u)$,则$\int_0^{\infty}a(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}[1-B(\infty,u)]\mathrm{d}u$. 由假设$\rho<r_{\infty}$,指数矩存在,则$\int_0^{\infty}a(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}[1-B(\infty,u)]\mathrm{d}u<\infty$.

则由关键更新定理:$\lim\limits_{u\to\infty}f_{a,w}(u)\mathrm{e}^{-\rho u}=\lim\limits_{u\to\infty}\hat{f}_{a,w}(u)=c$,其中

$$c=\frac{\int_{u=0}^{\infty}\int_{y=u}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}w(x+u,y-u)\mathrm{e}^{-\rho(y-u)}B(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\mathrm{d}u}{\int_{u=0}^{\infty}[1-B(\infty,y)]\mathrm{d}y} \tag{6}$$

3 理赔额为指数分布

假设理赔额$\{Y_i;i=1,2,\cdots\}$服从参数为β的指数分布. 如果$\alpha\geqslant\alpha_m$,则ρ存在,且是方程$M_T(-\theta(r)-\lambda_2(\mathrm{e}^r-1))=1-\dfrac{\rho}{\beta}$的解,则破产概率为$\psi(u)=\dfrac{\beta-R}{\beta}\mathrm{e}^{-Ru}$.

首先考虑$-C(t)$的分布. 设破产时刻为τ,令$\tilde{u}$表示破产前的瞬时盈余$C(\tau-)$. 则在破产时,事件$-C(\tau)\geqslant y$的条件分布为:

$$p(-C(\tau)\geqslant y\mid C(\tau-)=\tilde{u},\tau<\infty)=p(Y>\tilde{u}+y\mid Y>\tilde{u})=\frac{\beta\int_{\tilde{u}+y}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x}{\beta\int_{\tilde{u}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-\beta x} \tag{7}$$

因此,在$\tau<\infty$条件下,$-C(\tau)$服从参数为β的指数分布. 然而在测度$P^{(\rho)}$下,$p(\tau<\infty)=1$,则有$-C(\tau)$在测度$P^{(\rho)}$下服从参数为$\beta-\rho$的指数分布. 因此,$E_u^{(\rho)}[w(C_{\tau-},-C_{\tau})\mathrm{e}^{\rho C_t}]=(\beta-\rho)\int_0^{\infty}E_u^{(\rho)}[w(C_{\tau-},y)]\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y$.

由 Gerber-Shiu 函数的特性知道,当$w(x,y)=1,\alpha=0$时,$\psi(u)=f_{a,w}(u)$. 则有:

$$\psi(u)=f_{a,w}(u)=E_u[I(\tau<\infty)]=E[\mathrm{e}^{RC(\tau)}]\mathrm{e}^{-Ru}=M_{-C(\tau)}^{(R)}(-R)\mathrm{e}^{-Ru}=\frac{\beta-R}{\beta}\mathrm{e}^{-Ru} \tag{8}$$

4 结　语

针对双 Poisson 风险模型进行了研究,得到相应的破产概率上界以及逼近. 但文中的研究方法可以推广到其他离散模型,亦可得类似结论. 模型中也可以引入利率、分红等因素,使得结果可以更贴近现实. 此外,文中通过构造指数鞅,得到新的测度,使得破产的发生变得确定,也可以考虑不同的构造方式,得到不同指数鞅,使得在不同的测度下,破产发生变得不同,甚至可以规避风险.

参考文献:

[1] SCHMIDLI H. On the Gerber-Shiu function and change of measure[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2010(46):3-11

[2] GERBER H U. SHIU E S W. On the time value of ruin[J]. North American Actuarial Journal,1998(2):488-78

[3] BAO Z H. The expected discounted penalty at ruin in the risk process with random income[J]. Applied Mathematics and Computation,2006(179):559-566

[4] ROLSKI T. SCHMIDLI H,SCHMIDT V, et al. Stochastic processes for insurance and finance[M]. Chichester:wiley,1999

Research on Gerber-Shiu Function and Measurement Change under Double Poisson Risk Model

LI Ping

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Under light-tail assumption, the expected discount penalty function of discrete model for insurance company surplus is studied. By constructing index martingale, the new measurement is defined. By using measurement change, the discount is removed, new expected discount penalty function is obtained, the expression is simplified and the new satisfied renewing equation is obtained. Through expected discount penalty function under new measurement, Lundberg Inequality is received, by using measurement change, the incidence of bankruptcy becomes determined under new measurement, the renewing equation is simplified to a general renewal equation, furthermore, the key renewing theorem is used to obtain the asymptotic of expected discount penalty function when initial capital tends to infinity. Finally, as for the special situation that individual claim amount following exponential distribution, the explicit expression of its ruin probability formula is derived.

Key words: double Poisson risk model; Gerber-Shiu Function; measurement change

责任编辑:李翠薇

(上接第 10 页)

Empirical Analysis of Shanghai Composite Index Based on Semi-parametric GARCH Model

LU Shu-fang

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: By taking logarithm return rate of daily closing prices of Shanghai Composite Index during January 2nd, 2008-December 31st, 2012 as samples, by using semi-parameter GARCH model, the volatility of Shanghai Composite Index is studied, the semi-parametric GARCH model is compared with the parametric GARCH model, which demonstrates the advantage of the semi-parametric GARCH model.

Key words: volatility; semi-parameter model; GARCH Model; local polynomial estimate

责任编辑:李翠薇