文章编号:1672 - 058X(2013)05 - 0009 - 03

基于复合泊松过程的机场客流量分析

冀 云, 李厚朋, 付馨雨
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要:研究机场在 t 时间内客流量的数学模型. t 时间内航班起降架次为参数为 λ 的泊松过程,每架次航班所载乘客数形成一族独立同分布随机变量,可将机场客流量看作一个复合泊松过程,以随机过程为基础分析其数字特征,证明其具有平稳独立增量性.

关键词:机场客流量;复合泊松过程;特征函数;随机分析
中图分类号:O211 **文献标志码**:A

0 引 言

机场客流量是衡量机场规模大小的重要指标之一,反映为一个机场在一定的时间内,在相应的设备条件和人力组织下,机场旅客到达和离开的人数总量,一般以人次来表示单位.

随着我国社会经济的发展,我国的运输行业近几年呈现出非常迅猛的发展势头,其中航空运输业尤为突出. 据统计,2011 年全国各地有 21 个机场客流量超过千万,其中有 8 个机场客流量甚至超过了 2 千万,平均一天超过 5 万人次. 但与此同时,由于各种各样的因素,机场经常会出现航班延误、旅客滞留等情况. 因此对机场客流量的预测分析对机场的基础设施建设、总体布局、航班的安排、综合运力的估计规划等是非常重要的.

通常来说,每架次航班抵达机场及停留时间、起飞时间具有一定的规律性,但受到天气变化、设备损坏等各种环境和人为因素的影响,航班抵达和离开机场又具有较大的随机性. 之前的研究表明,航班抵港模型基本可以看作泊松过程[1]. 假设每架次航班所搭乘的旅客数是一族独立同分布随机变量,因此,可以将机场客流量设为一个复合泊松过程,利用随机过程的一些数字特征对其进行分析.

1 基本假设

以概率统计和随机过程的知识为基础. 假定机场在一段时间 t 之内的总客流量是一个随机过程,假设每架次航班所搭乘旅客数为 X_n(其中 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为独立同分布的随机序列),$X(t)$ 表示在时间 t 之内进出机场的航班总数(其中 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程),且 $\{X_n\}$ 与 $\{X(t)\}$ 相互独立. 要考虑的问题是利用随机过程的已知方法对假设进行分析,以进一步确定机场客流量的表达式和相关数字特征.

收稿日期:2012 - 11 - 30;**修回日期**:2012 - 12 - 29.
作者简介:冀云(1984-),男,重庆人,讲师,硕士研究生,从事随机过程研究.

2 机场客流量随机分析

2.1 时间 t 内机场客流量及数字特征

根据假设,t 时间内机场客流量可看作一个随机过程 $Y(t)$,则 $Y(t)=X_1+X_2+\cdots+X_{X(t)}=\sum_{n=1}^{X(t)}X(n)$ $(t\geqslant 0)$. 这里采用 $Y(t)$ 的特征函数来分析机场客流量的数字特征,特征函数的计算为:

$$\varphi_{Y(t)}(u)=E(\mathrm{e}^{uY(t)}) \tag{1}$$

将 $Y(t)=\sum_{n=1}^{X(t)}X(n)$ 代入,有:

$$\begin{aligned}
\text{式}(1) &= E(\mathrm{e}^{u\sum_{n=1}^{X(t)}X(n)})= \\
&\sum_{n=0}^{\infty}E\{\mathrm{e}^{u\sum_{k=1}^{X(t)}X(k)}\mid X(t)=n\}\cdot P\{X(t)=n\}= \\
&\sum_{n=0}^{\infty}E(\mathrm{e}^{u\sum_{k=1}^{X(t)}X(k)})\cdot P\{X(t)=n\}= \\
&\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{X_1}(u)]^n\cdot P\{X(t)=n\}= \\
&\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{X_1}(u)]^n\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t\varphi_{X_1}(u)]^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}= \\
&\mathrm{e}^{\lambda t\varphi_{X_1}(u)}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{\lambda t[\varphi_{X_1}(u)-1]}
\end{aligned} \tag{2}$$

从而可完全确定机场 t 时间内客流量 $Y(t)$ 的概率分布. 同时可以得到 $Y(t)$ 的期望和方差,这里引入一个定义[2]:

定义 1 若 $\eta=\sum_{j=1}^{\zeta}\xi_i$ 且 $E(\eta\mid\zeta=n)=nE(\xi_1)$,$D(\eta\mid\zeta=n)=nD(\xi_1)$,则

$$E(\eta)=E[E(\eta\mid\zeta)]=E[\zeta E(\xi_1)]=E(\xi_1)E(\zeta) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
D(\eta) &= E[D(\eta\mid\zeta)]+D[E(\eta\mid\zeta)]=E[\zeta D(\xi_1)]+D[\zeta E(\xi_1)]= \\
&E(\zeta)D(\xi_1)+D(\zeta)E^2(\xi_1)
\end{aligned} \tag{4}$$

由此可得

$$E[Y(t)]=E[X(t)]E(X_1)=\lambda tE(X_1) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
D[Y(t)] &= E[X(t)]D(X_1)+D[X(t)]E^2(X_1)= \\
&\lambda t[E(X_1^2)-E^2(X_1)]+\lambda tE^2(X_1)= \\
&\lambda tE(X_1^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

这里 $\lambda t=E[X(t)]$ 称为“累积强度”,λ 在泊松过程中表示过程的平均到达率,这里 λt 反映了 t 时间内飞机进出机场的频繁程度. 故在 t 时间内机场客流量的均值可由 t 时间内进出机场的飞机数均值乘以乘客数量的均值得到.

2.2 机场客流量的性质

综上所述,t 时间内机场的总的客流量 $Y(t)=\sum_{n=1}^{X(t)}X(n)$ 是一个复合泊松过程,飞机进出机场为一个参数为 λ 的泊松过程,而每架飞机所载乘客数是一个随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots)$. 这里当 $X_n\equiv 1$ 或其他自然数时,有 $Y(t)=X(t)$ 或 $Y(t)=nX(t)(n=1,2,\cdots)(t\geqslant 0)$,此时复合泊松过程可化为泊松过程,由此可见泊松

过程是复合泊松过程的特例,但对于机场客流量的分析来说,由于进出机场的航班型号不一,载客量不同,旅客登机与否,环境影响等随机因素,$\{X_n, n = 1,2,\cdots\}$ 取随机变量是符合实际情况的.

复合泊松过程 $Y(t)\{Y(t), t\geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量性,下面对此进行证明.

2.2.1　$Y(t)$增量平稳

证明　要证明 $Y(t)$增量平稳,只需证明对任意 $0 \leqslant s < t$,增量 $Y(t) - Y(s)$ 的特征函数是 $t-s$ 的函数,与其他量无关. 设有时刻 $s<t$,则

$$\varphi_{Y(t)-Y(s)}(u) = E\{e^{u[Y(t)-Y(s)]}\} \tag{7}$$

由之前对 $Y(t)$特征函数的推导可得,

$$\varphi_{Y(t)-Y(s)}(u) = e^{\lambda(t-s)\varphi_{X_1}(u)} \cdot e^{-\lambda(t-s)} = e^{\lambda(t-s)[\varphi_{X_1}(u)-1]} \tag{8}$$

由此可以看出,增量 $Y(t) - Y(s)$ 只与 $t-s$ 有关,而不依赖于具体的 s 或 t 的值是多少,故可以证明 $Y(t)$具有平稳增量性.

2.2.2　$Y(t)$增量独立

证明　由 2.2.1 知 $Y(t)$增量平稳,又因$\{X(t), t\geqslant 0\}$为泊松过程,具有独立增量性,$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立同分布随机序列,对任意 $t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > 0$,有

$$\begin{aligned} &Y(t_n) - Y(t_{n-1}) = X_{X(t_{n-1})+1} + \cdots + X_{X(t_n)} \\ &Y(t_{n-1}) - Y(t_{n-2}) = X_{X(t_{n-2})+1} + \cdots + X_{X(t_{n-1})} \\ &\cdots \\ &Y(t_2) - Y(t_1) = X_{X(t_1)+1} + \cdots + X_{X(t_2)} \end{aligned} \tag{12}$$

因$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立同分布随机序列,且式(12)右边各项脚码不相符,故可证 $Y(t)$增量独立.

同时,设时刻 $s<t$,有

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[Y(s),Y(t)] &= \mathrm{Cov}[Y(s),Y(t) - Y(s) + Y(s)] = \\ &\mathrm{Cov}[Y(s),Y(t) - Y(s)] + \mathrm{Cov}[Y(s),Y(s)] \end{aligned} \tag{10}$$

由 2.2.2 知 $Y(s) = Y(s) - Y(0)$ 与 $Y(t) - Y(s)$独立,故 $\mathrm{Cov}[Y(s),Y(t) - Y(s)] = 0$,

$$\text{式(10)} = \mathrm{Cov}[Y(s),Y(s)] = D[Y(s)] = \lambda s E(X_1^2) \tag{11}$$

所以一般有 $\mathrm{Cov}[Y(s),Y(t)] = \lambda E(X_1^2)\min(s,t)$[3].

3　结　论

基于以上推导,机场在 t 时间内客流量可看做一个复合泊松过程模型,若给定参数 λ,则可得到 t 时间内机场客流量的分布函数,从而预测该机场客流量大小,对机场飞机起降架次安排,提前预备忙时旅客安置方案有一定参考价值.

参考文献:

[1] BEASLE J E, SHARAIHA Y M, ABRAMSON D. Scheduling aircraft landings[J]. The static case, TransportationScience, 2000 (34):180-197

[2] ROSS S M. Stochastic Processes[M]. New York:John Wiley&Sons, 1983

[3] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004

[4] 魏艳华,王炳参,宋立新. 复合泊松过程性质及其应用[J]. 宜宾学院学报, 2009, 12(2):42-44

(下转第 16 页)