文章编号:1672 -058X(2013)05 -0005 -04

关于 Pell 方程 $Ax^2-By^2=\pm 1(A,B\in \mathbf{Z}^+)$

万 飞, 杜先存
(红河学院 教师教育学院,云南 蒙自 661199)

摘 要:Pell 方程 $Ax^2-By^2=\pm 1(A,B\in \mathbf{Z}^+,AB$ 不是完全平方数)可解性的判别是一个非常有意义的问题. 运用 Legendre 符号和同余性质等初等方法给出了形如 $Ax^2-By^2=\pm 1(A,B\in \mathbf{Z}^+,AB$ 不是完全平方数)型 Pell 方程无正整数解的 6 个结论. 这些结论对研究狭义 Pell 方程 $x^2-Dy^2=\pm 1$(D 不是完全平方数)起了重要作用.

关键词:Pell 方程;正整数解;素数;同余;Legendre 符号
中图分类号:O156.1 **文献标志码**:A

关于 Pell 方程 $Ax^2-By^2=\pm 1$ 的整数解问题,文献[1-7]已有一些结果,此处旨在探讨 $Ax^2-By^2=\pm 1$ $(A,B\in \mathbf{Z}^+,AB$ 是非完全平方数)型 Pell 方程的解的情况.

1 主要结论

定理 1 对于 Pell 方程 $2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=1(m,q,p_i\in \mathbf{Z}^+,t\in \mathbf{N})$,若 $q\equiv\pm 1(\mathrm{mod}8)$ 是素数,$p_i(i=1,2,\cdots,2s+1)$ 为奇素数,$\left(\frac{p_i}{q}\right)=-1$,则该方程无正整数解.

定理 2 对于 Pell 方程 $2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=1(m,q,p_i\in \mathbf{Z}^+,t\in \mathbf{N})$,若 $q\equiv\pm 3(\mathrm{mod}8)$ 是素数,$p_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为奇素数,$\left(\frac{p_i}{q}\right)=1$,则该方程无正整数解.

定理 3 对于 Pell 方程 $2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=-1(m,q,p_i\in \mathbf{Z}^+,t\in \mathbf{N})$,若 $q\equiv 1(\mathrm{mod}8)$ 是素数,$p_i(i=1,2,\cdots,2s+1)$ 为奇素数,$\left(\frac{p_i}{q}\right)=-1$,则该方程无正整数解.

定理 4 对于 Pell 方程 $2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=-1(m,q,p_i\in \mathbf{Z}^+,t\in \mathbf{N})$,若 $q\equiv 3(\mathrm{mod}8)$ 是素数,$p_i(i=1,2,\cdots,2s+1)$ 为奇素数,$\left(\frac{p_i}{q}\right)=-1$,则该方程无正整数解.

定理 5 对于 Pell 方程 $2^t\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=-1(m,q,p_i\in \mathbf{Z}^+,t\in \mathbf{N})$,若 $q\equiv -1(\mathrm{mod}8)$ 是素数,

收稿日期:2012 -11 -07;**修回日期**:2012 -12 -20.
作者简介:万飞(1969-),女,云南建水人,副教授,从事数学教育及初等数论研究.

$p_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为奇素数,$(\frac{p_i}{q})=1$,则该方程无正整数解.

定理 6 对于 Pell 方程 $2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=-1(m,q,p_i\in\mathbf{Z}^+,t\in\mathbf{N})$,若 $q\equiv-3(\mathrm{mod}8)$ 是素数,p_i 为奇素数,且$(\frac{p_i}{q})=1(i=1,2,\cdots,s)$,则该方程无正整数解.

2 定理证明

2.1 定理 1 的证明

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=1 \tag{1}$$

两边取模 q 得

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2\equiv1(\mathrm{mod}\ q) \tag{2}$$

若式(1)有正整数解,则式(2)有解,故模 q 的 Legendre 符号$\left(\frac{2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=1$. 因 $q\equiv\pm1(\mathrm{mod}\ 8)$,则$(\frac{2}{q})=1$,故$(\frac{2^t}{q})=1$.

又$(\frac{p_i}{q})=-1(i=1,2,\cdots,2s+1)$,则$\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$,故$\left(\frac{2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=(\frac{2^t}{q})\cdot\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$,矛盾.

所以式(1)无正整数解.

2.2 定理 2 的证明

$$2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=1 \tag{3}$$

两边取模 q 得

$$2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2\equiv1(\mathrm{mod}\ q) \tag{4}$$

若式(3)有正整数解,则式(4)有解,故模 q 的 Legendre 符号$\left(\frac{2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=1$. 因 $q\equiv\pm3(\mathrm{mod}8)$,则$(\frac{2}{q})=-1$,故$(\frac{2^{2t+1}}{q})=-1$.

又$(\frac{p_i}{q})=1(i=1,2,\cdots,s)$,则$\left(\frac{\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=1$,故$\left(\frac{2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=(\frac{2^{2t+1}}{q})\cdot\left(\frac{\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=-1$,矛盾.

所以式(3)无正整数解.

2.3 定理 3 的证明

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=-1 \tag{5}$$

两边取模 q 得

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2\equiv -1(\bmod q)\tag{6}$$

若式(5)有正整数解,则式(6)有正整数解,故模 q 的 Legendre 符号 $\left(\frac{-2^t\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=1$. 因 $q\equiv 1(\bmod 8)$ 时, $\left(\frac{-1}{q}\right)=1,\left(\frac{2}{q}\right)=1$, 则 $\left(\frac{-2^t}{q}\right)=\left(\frac{-1}{q}\right)\cdot\left(\frac{2^t}{q}\right)=1$.

又 $\left(\frac{p_i}{q}\right)=-1(i=1,2,\cdots,2s+1)$, 则 $\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$, 故 $\left(\frac{-2\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=\left(\frac{-2}{q}\right)\cdot\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$, 矛盾.

所以式(5)无正整数解.

2.4 定理 4 的证明

$$2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2-mqy^2=-1\tag{7}$$

两边取模 q 得

$$2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_ix^2\equiv -1(\bmod q)\tag{8}$$

若式(7)有正整数解,则式(8)有正整数解,故模 q 的 Legendre 符号 $\left(\frac{-2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=1$. 因 $q\equiv 3(\bmod 8)$ 时, $\left(\frac{-1}{q}\right)=-1,\left(\frac{2}{q}\right)=-1$, 则 $\left(\frac{-2^{2t+1}}{q}\right)=\left(\frac{-1}{q}\right)\cdot\left(\frac{2^{2t+1}}{q}\right)=1$.

又 $\left(\frac{p_i}{q}\right)=-1(i=1,2,\cdots,2s+1)$, 则 $\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$, 故 $\left(\frac{-2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=\left(\frac{-2^{2t+1}}{q}\right)\cdot\left(\frac{\prod_{i=1}^{2s+1}p_i}{q}\right)=-1$, 矛盾.

所以式(7)无正整数解.

2.5 定理 5 的证明

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=-1\tag{9}$$

两边取模 q 得

$$2^t\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2\equiv -1(\bmod q)\tag{10}$$

若式(9)有正整数解,则式(10)有正整数解,故模 q 的 Legendre 符号 $\left(\frac{-2^t\cdot\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=1$. 因 $q\equiv -1(\bmod 8)$ 时, $\left(\frac{-1}{q}\right)=-1,\left(\frac{2}{q}\right)=1$, 则 $\left(\frac{-2^t}{q}\right)=\left(\frac{-1}{q}\right)\cdot\left(\frac{2^t}{q}\right)=-1$.

又 $\left(\frac{p_i}{q}\right)=1(i=1,2,\cdots,s)$, 则 $\left(\frac{\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=1$, 故 $\left(\frac{-2^t\cdot\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)==\left(\frac{-2^t}{q}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{s}p_i}{q}\right)=-1$, 矛盾.

所以式(9)无正整数解.

2.6 定理 6 的证明

$$2^{2t+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}p_ix^2-mqy^2=-1\tag{11}$$

两边取模 q 得

$$2^t \cdot \prod_{i=1}^{s} p_i x^2 \equiv -1 (\bmod q) \tag{12}$$

若式(11)有正整数解,则式(12)有正整数解,故模 q 的 Legendre 符号$\left(\frac{-2^{2t+1} \cdot \prod_{i=1}^{s} p_i}{q}\right) = 1$. 因 $q \equiv -3 (\bmod 8)$ 时,$\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$,$\left(\frac{2}{q}\right) = -1$,则$\left(\frac{-2^{2t+1}}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) \cdot \left(\frac{2^{2t+1}}{q}\right) = -1$.

又$\left(\frac{p_i}{q}\right) = 1 (i = 1,2,\cdots,s)$,则$\left(\frac{\prod_{i=1}^{s} p_i}{q}\right) = 1$,故$\left(\frac{-2^{2t+1} \cdot \prod_{i=1}^{s} p_i}{q}\right) = = \left(\frac{-2^{2t+1}}{q}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{s} p_i}{q}\right) = -1$,矛盾.

所以式(11)无正整数解.

参考文献:

[1] 杜先存,万飞,赵金娥. Pell 方程 $ax^2 - by^2 = 1$ 的最小解[J]. 湖北民族学院学报:自然科学版,2012,30(1):35-38

[2] 杜先存. 关于 Pell 方程 $Ax^2 - (A \pm 1)y^2 = 1 (A \in Z^+, A \geqslant 2)$[J]. 保山学院学报,2012,31(2):57-59

[3] 杜先存,万飞,赵金娥. 关于 Pell 方程 $qx^2 - (qn \pm 6)y^2 = \pm 1$($q$ 是素数)[J]. 周口师范学院学报,2012,29(5):13-14

[4] 杜先存,赵金娥. 关于 Pell 方程 $ax^2 - mqy^2 = \pm 1$($m \in Z^+$,a 为奇数,q 为素数)[J]. 沈阳大学学报,2012,24(3):32-34

[5] 杜先存,黄梅,赵金娥. 关于 Pell 方程 $px^2 - (pn \pm 2)y^2 = -1$($p \equiv -1, \pm 3 (\bmod 8)$ 是素数)[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(9):5-7;28

[6] 杜先存,万飞,赵金娥. 关于 Pell 方程 $ax^2 - mqy^2 = \pm 1$($m \in Z^+$,$2 \mid a \mid$,$q \equiv \pm 1 (\bmod 4)$ 是素数))[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(10):11-15

[7] 万飞,杜先存. 关于 Pell 方程 $qx^2 - (qn \pm 2^k \cdot 3^l)y^2 = \pm 1$($k, l \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}$, q 是奇素数)[J]. 长沙大学学报:自然科学版,2012,26(5):9-10

On Pell Equation $Ax^2 - By^2 = \pm 1 (A, B \in Z^+)$

WAN Fei, DU Xian-cun

(Teachers' Education College, Honghe University, Yunnan Mengzi 661199, China)

Abstract: The solubility of Pell equation $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ ($A, B \in Z^+$, AB is a non-square positive integer) is a very meaningful question. In this paper, it works out six conclusions that Pell equation such as $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ ($A, B \in Z^+$, AB is a non-square positive integer) has no positive integer solation by using the elementary method of Legendre symbol and property of congruence, which play an important role in studying special Pell equation $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ ($A, B \in Z^+$, AB is a non-square positive integer).

Key words: Pell equation; positive integer solution; prime factor; congruence; Legendre symbol

责任编辑:李翠薇