

文章编号:1672-058X(2013)04-0019-06

通过工程实际问题认识强度理论的分析 and 研究*

敖文刚, 王立存

(重庆工商大学 机械工程学院, 重庆 400067)

摘要:运用统一强度理论和其他多种强度理论分析了受内压作用的薄壁压力容器和挺柱体冷挤压预应力组合凹模;通过对分析结果比较充分认识了统一强度理论,并应用于冷挤压凹模和涡旋压缩机内壁压力等实际工程研究中.

关键词:强度理论;等效应力;拉压异性;工程应用

中图分类号:TB12

文献标志码:A

强度理论研究材料在复合应力作用下的屈服和破坏规律,并为工程结构的分析提供理论基础和计算准则,在理论上和工程实际中都具有重要的意义.大部分材料力学教科书主要介绍 4 个古典强度理论 + Mohr-Coulomb 强度理论.但在某些实际工程问题中,运用以上这些强度理论并不能得到很好的结果.俞茂宏教授^[1]提出的统一强度理论在土木、水利、机械、塑性加工等领域被广泛应用,是对传统强度理论的总结和发展.此处分析了受内压作用的薄壁压力容器和挺柱体冷挤压预应力组合凹模;通过对分析结果比较充分认识了统一强度理论,并应用于冷挤压凹模和涡旋压缩机内壁压力等实际工程研究中.

1 强度理论中的等效应力

作者在多年的教学过程中发现,有不少学生在大学毕业时仍然对强度理论中等效应力的概念不甚了解,不知道 Mises 等效应力和 Tresca 等效应力所表达的含义.对运用不同等效应力进行强度失效判断是偏于安全还是偏于经济也不甚清楚.虽然材料力学各经典教材非常明晰地阐述了以上的问题,但学生由于缺少必要工程运用,因此并没有形成运用等效应力来进行强度失效判断的思维习惯,对强度理论中等等效应力是多种应力进行组合的本质没有清晰的认识.

在各种材料力学教材中,等效应力有计算应力、相当应力和应力强度等多个名称,运用等效应力可以将所有的强度理论表达为统一的形式:

$$\sigma_r \leq [\sigma] \quad (1)$$

式中 σ_r 表示等效应力. 4 个古典强度理论和 Mohr-Coulomb 强度理论的等效应力分别为:

收稿日期:2012-10-29;修回日期:2012-11-08.

* 基金项目:重庆市科技攻关项目(CSTC2011AC6086);重庆市教委科技资助项目(KJ110710);重庆市教委科学技术研究项目(KJ120716).

作者简介:敖文刚(1976-),男,重庆人,讲师,从事工程力学研究.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sigma_{r1} = \sigma_1 \\ f = \sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ f = \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \\ f = \sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \\ f = \sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 \end{array} \right. \quad (2)$$

式中 $[\sigma_t]$ $[\sigma_c]$ 表示材料的抗拉、抗压许用应力. 俞茂宏教授将近百年的强度理论分为单剪强度理论、八面体剪应力强度理论(也可称为三剪强度理论)和双剪强度理论三大系列^[1]. 材料力学教材中的第三强度理论(也称 Tresca 屈服准则)属于单剪系列的强度理论,而第四强度理论(也称 Mises 屈服准则)就属于三剪系列的强度理论. 1961 年俞茂宏教授提出双剪应力屈服准则,它是双剪系列的第一个强度理论. 双剪应力屈服准则认为当单元体的 2 个较大主剪应力之和达到某一极限时,材料发生屈服,即

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{tw} = |\tau_{13}| + |\tau_{12}| = \tau_w^0, \text{当 } \tau_{12} \geq \tau_{23} \\ \tau_{tw} = |\tau_{13}| + |\tau_{23}| = \tau_w^0, \text{当 } \tau_{12} \leq \tau_{23} \end{array} \right. \quad (3)$$

其中, $\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, $\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, $\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$. 根据式(3)可以得到双剪应力屈服准则的等效应力为:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ f = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3, \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{array} \right. \quad (4)$$

比 Tresca 屈服准则多考虑了中间主剪应力的影响,它们在不同的应力状态下相差 0% ~ 33.3%. Mises 屈服准则的结果介于两者之间. 俞茂宏于 1983、1991 年分别建立了广义双剪强度理论和统一强度理论^[2,3],这两种理论都可适合于拉压强度异性的材料,其中统一强度理论的等效应力表达为:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3), \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ f = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3, \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{array} \right. \quad (5)$$

式中,参数 $\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$ 为材料拉伸强度极限 σ_t 和压缩强度极限 σ_c 之比,参数 $b = \frac{(1+\alpha)\tau_b - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_b}$ 为中间应力影响因素. 统一强度理论可以转化为任何已知的强度理论:当 $\alpha = 1, b = 0$ 时,统一强度理论转化为 Tresca 屈服准则;当 $\alpha = 1, b = 1$ 时,统一强度理论转化为双剪应力屈服准则;当 $\alpha = 1, b = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$ 时,统一强度理论代替 Mises 屈服准则;当 $b = 0$ 时,统一强度理论转化为 Mohr-Coulomb 强度理论;当 $b = 1$ 时,统一强度理论转化为广义双剪强度理论.

2 强度理论在受内压作用的薄壁压力容器分析中的应用

材料力学关于强度理论的教学目标是不仅要保证结构安全,还要考虑其经济效益. 受内压作用的薄壁压力容器是材料力学教材^[4]中的一个简单实例,可以运用以上提到的几个强度理论进行分析,并得到其各强度理论的等效应力. 对薄壁压力容器进行应力分析的过程可以参见材料力学教材,最终得到薄壁压力容

器的 3 个主应力为:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2t}, \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pD}{4t}, \sigma_3 = \sigma_r = 0$$

其中 p 为容器内压, t 为容器壁厚, D 为容器直径. 根据 3 个主应力, 可得到各强度理论所对应的等效应力, 如表 1 所示:

表 1 不同强度理论的等效应力

强度理论	Tresca	Mises	UST ($b=0$)	UST ($b=1/4$)	UST ($b=1/2$)	UST ($b=0.366$)	UST ($b=3/4$)	UST ($b=1$)
等效应力	σ_1	$\sqrt{3}\sigma_1/2$	σ_1	$9\sigma_1/10$	$5\sigma_1/6$	$\sqrt{3}\sigma_1/2$	$11\sigma_1/14$	$3\sigma_1/4$

表 1 中的 UST 指统一强度理论, 这里列出了 $\alpha=1$ 时, $b=0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1/1 + \sqrt{3} \approx 0.366$ 几种情况和 Tresca 屈服准则、Mises 屈服准则等的等效应力. 从表 1 可知, Tresca 屈服准则 ($\alpha=1, b=0$) 的等效应力最大, 而双剪应力屈服准则 ($\alpha=1, b=1$) 的等效应力最小. 这就表示判别结构强度时, 用 Tresca 屈服准则结构将最早失效, 此时结构偏于安全; 用双剪应力屈服准则结构将最后失效, 此时结构偏于经济.

3 强度理论在冷挤压预应力组合凹模等强度分析中的应用

在许多工程实际中会遇到一些拉压强度不等的材料, 如岩石、土、铸铁、高强度钢、铝合金、硬质合金等, 而上面例子中应用的几种强度理论只能应用于拉压强度相同 ($\alpha=1$) 的材料. 冷挤压技术作为一种高精、高效、优质低耗的先进生产工艺技术, 已在机械、仪表、电器、轻工、宇航、船舶、军工等工业部门中得到广泛的应用. 目前较广泛使用的冷挤压模具钢材料一般为 Cr12Mo、CrWMn、Cr12MoV、YG20、YG25 等, 它们都具有明显的拉压强度不等的现象, 且成本价格一般比较昂贵. 由于凹模在冷挤压过程中承受很高的工作压力, 所以凹模设计、制造时通常采用多层预应力组合凹模的结构形式, 通过组合凹模各层的过盈配合产生切向压应力, 来抵消或降低凹模内层的切向拉应力, 达到提高凹模强度和寿命的目的. 经验表明, 组合凹模一般以 3 层为宜, 层数过多涉及模具工艺制造困难, 过少 (如两层) 又达不到理想效果. 图 1 所示为受工作内压 P_i 作用的 3 层预应力组合凹模的力学模型.

图 1 所示的模型可处理为组合圆筒, 每层都可作为厚壁圆筒来分析, 内、中层圆筒间和中、外层圆筒间分别有过盈量 δ_1, δ_2 . 对受内压 P_1 和外压 P_2 作用, 内、外半径分别为 R, r 的厚壁圆筒进行分析时, 根据拉梅公式可以得到其应力分量为^[5]:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R^2 r^2 (p_2 - p_1)}{(R^2 - r^2) \rho^2} + \frac{r^2 p_1 - R^2 p_2}{R^2 - r^2} & (6) \\ \sigma_\theta = -\frac{R^2 r^2 (p_2 - p_1)}{(R^2 - r^2) \rho^2} + \frac{r^2 p_1 - R^2 p_2}{R^2 - r^2} & (7) \end{cases}$$

组合凹模一端放置于机架上, 且模芯 (内层圆筒) 与内预应力圈 (中层圆筒)、内预应力圈和外预应力圈 (外层圆筒) 之间有倒置的锥形角约束组合凹模轴向的变形, 所以组合凹模可简化为轴对称的平面应变问题, 则有剪应力 $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\rho} = 0$; 同时有 $\varepsilon_z = 0$, 则可知 $\sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho)$. 根据厚壁圆筒所受的应力状态来看, 在组合凹模的内、中、外 3 层内壁处都有 $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_\rho$, 则有 $\sigma_1 = \sigma_\theta > 0, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_\rho < 0$, 由于拉压比 $\alpha < 1, \nu < 0.5$, 可以求得:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho) \leq \frac{\sigma_\theta + \alpha\sigma_\rho}{1 + \alpha}$$

根据式(6)得屈服条件为:

$$\sigma_\theta - \frac{\alpha}{1 + b}(b\sigma_z + \sigma_\rho) = \sigma_s \quad (8)$$

将式(8)化简为:

$$\sigma_{rUST} = \frac{1 + b - b\alpha\nu}{1 + b}\sigma_\theta - \frac{b\alpha\nu + \alpha}{1 + b}\sigma_\rho = \sigma_s \quad (9)$$

这就是运用统一强度理论得到的判断凹模屈服的条件, σ_{rUST} 为其等效应力. 根据等强度设计理念, 运用统一强度理论可以建立组合凹模各层同时屈服的条件为^[6]:

$$\sigma_{rUSTi} = \sigma_{si} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

在组合凹模各层材料许用应力和内、外径 (R, r) 已知的条件下, 可以通过式(10)来建立以组合凹模分层半径 r_1, r_2 和内压 P_i 为未知数的含有 3 个方程的方程组. 作者通过对式(10)的方程组进行数学推导, 并根据推导结果编写了通过设计分层半径 r_1, r_2 和过盈量 δ_1, δ_2 , 使内压 P_i 达到最大值的小程序.

现以挺柱体的冷挤压组合凹模设计为例, 根据挺柱体外形尺寸知凹模内半径为 23 mm, 而外径取 130 mm, 凹模材料 (Cr12MoV) 的许用应力可取为 $[\sigma_{s1}] = 1\ 800\ \text{MPa}$ ($\alpha_1 = 0.74$), 内层预应力圈材料 (4Cr5MoSiV1) 的许用应力可取为 $[\sigma_{s2}] = 1\ 200\ \text{MPa}$ ($\alpha_1 = 0.82$), 外层预应力圈的材料 (40CrNiMo) 的许用应力可取为 $[\sigma_{s3}] = 700\ \text{MPa}$ ($\alpha_1 = 1$), 外、内层预应力圈和凹模材料的弹性模量都为 200 Gpa, 经估算凹模最大工作内压约 1 589 MPa. 运用小程序可以计算出运用不同强度理论组合凹模的设计参数和可以承受的最大内压, 图 2 是运用 Tresca 准则得到的结果:

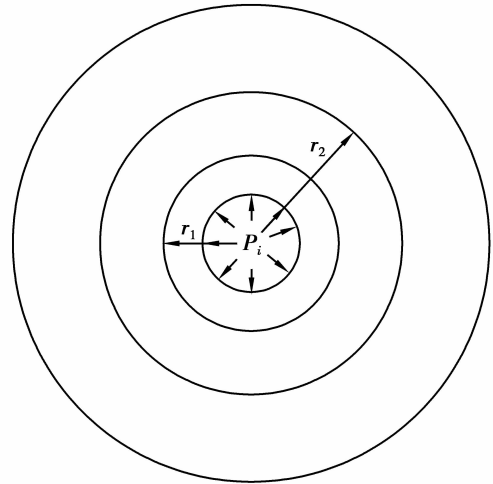


图 1 3 层组合凹模的力学模型

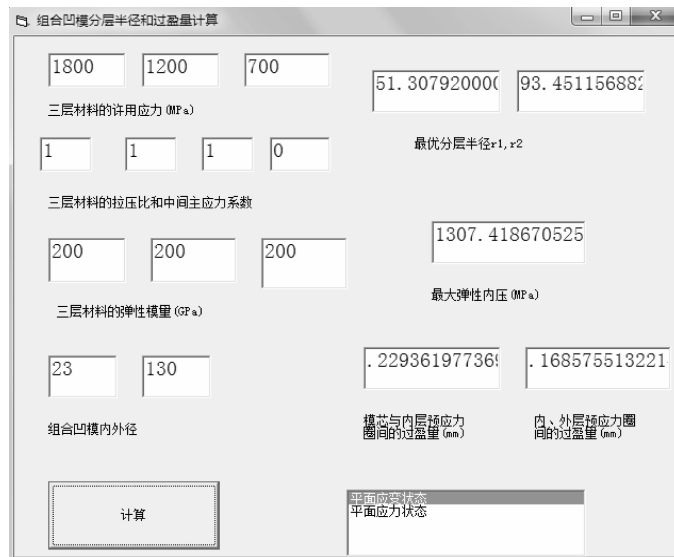


图 2 组合凹模最优分层半径、过盈量和最大内压计算结果

此程序中凹模 3 层材料的拉压比分别取值, 而中间主应力系数统一取值, 取定组合凹模内、外半径分别为 $r = 23\ \text{mm}, R = 130\ \text{mm}$, 通过小程序计算出运用不同强度理论的最大内压的结果如表 2 所示:

表 2 组合凹模最大内压 MPa

强度理论	Tresca 准则	UST ($b=0.366$)	UST ($b=0$)	UST ($b=1$)	Mises 准则
最大内压	1 307.4	1 701.7	1 504	1 920.5	1 502.8

表 2 中统一强度理论(UST)统一取 $\alpha_1=0.74, \alpha_2=0.82, \alpha_3=1$, 通过表 2 可以看出, 当考虑材料拉压异性后组合凹模可承受的最大内压有较大的提高. 当采用 Mises 准则, 组合凹模最大内压为 1 502.8 MPa, 其设计参数为: 分层半径 $r_1=51.308$ mm, $r_2=93.681$ mm; 过盈量 $\delta_1=0.26293$ mm, $\delta_2=0.16601$ mm. 将此计算结果代入 ANSYS 进行分析, 得到 Mises 和 Tresca 等效应力沿组合凹模半径分布的曲线如图 3 所示.

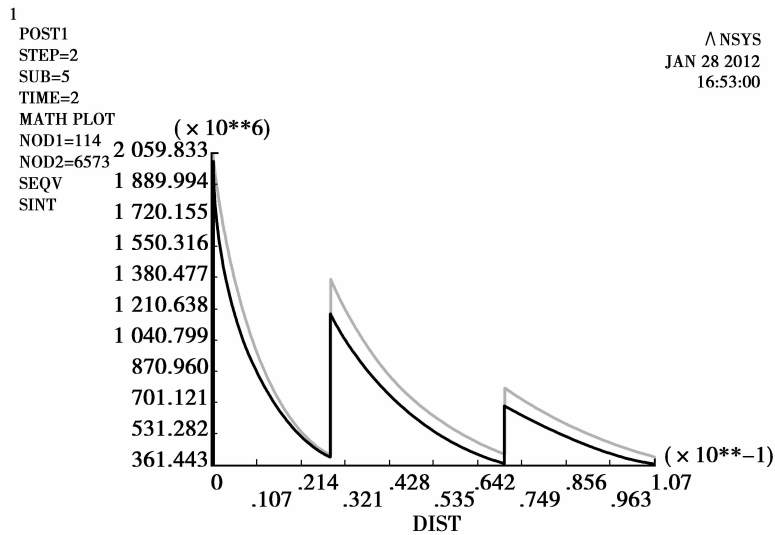


图 3 组合凹模 Mises, Tresca 等效应力曲线

从图 3 可以清楚地看出, 当工作内压达到 1 502.8 MPa 时, 模芯和两层预应力圈内壁的 Mises 等效应力几乎同时达到屈服应力, 凹模和预应力圈材料的潜能都可以得到最大的发挥; 而其 Tresca 等效应力则已经超过了各层的屈服应力, 凹模已经失效. 通过 ANSYS 后处理模块可得到模芯和内、外层预应力圈内壁处的 Mises, Tresca 等效应力为:

表 3 组合凹模 Tresca, Mises 等效应力 ANSYS 分析结果与理论期望值的比较 MPa

	凹模(模芯)	内预应力圈	外预应力圈
Ansys 计算 Mises 等效应力	1 800	1 210	685
Ansys 计算 Tresca 等效应力	2 070	1 400	786
等强度设计理论期望值	1 800	1 200	700

通过小程序分析得到如下结果: 考虑材料拉压异性对凹模强度的影响, 组合凹模外径需要 130 mm; 如果不考虑材料拉压异性, 运用 Mises 屈服准则, 组合凹模外径需要 160 mm; 运用 Tresca 屈服准则, 增加组合凹模外径对其强度的增强作用已经不明显, 而需要替换为许用应力更高的材料. 根据所编写程序计算结果可见, 考虑拉压异性可以充分发挥组合凹模材料的强度潜能, 使组合凹模在相同尺寸的情况下, 能达到更高的强度.

4 结 论

在强度理论部分内容的教学和科学研究过程中应该强化以下几点:通过引入统一强度理论,将强度理论的运用范围扩大为拉压同性、异性材料,将已有的强度理论作为其特例并得到更多新的强度理论;让学生清晰认识到强度理论中等效应力是多种应力进行组合的本质,并应熟悉几个常用强度理论等效应力的具体表达式;通过强度理论在工程实际中的具体运用让学生理解运用不同强度理论将会产生偏于安全或偏于经济分析结果,通过分析受内压作用的薄壁压力容器和挺柱体冷挤压预应力组合凹模的研究,充分认识统一强度理论,并在冷挤压和涡旋压缩机内壁压力的具体实际工程问题中作出正确的选择。

参考文献:

- [1] 俞茂宏. 强度理论百年总结[J]. 力学进展, 2004, 34(4): 529-560
- [2] 俞茂宏, 何丽南. 材料力学中强度理论内容的历史演变和最新发展[J]. 力学与实践, 1991, 13(2): 59-61
- [3] 俞茂宏. 论基础力学教材和教学的创新[A]. 2009 力学课程报告论坛论文集[C]. 北京: 高等教育出版社, 2009: 3-14
- [4] 刘鸿文. 材料力学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2004
- [5] 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995
- [6] 敖文刚, 王歆. 运用统一强度理论分析预应力组合圆筒分层半径和过盈量[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2011, 28(3): 284-288

Analysis and Research on the Understanding of Strength Theory through Engineering Practice

AO Wen-gang, WANG Li-cun

(School of Mechanical Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Uniform strength theory and other kinds of strength theories are used to analyze thin-wall pressure vessel and cold extrusion pre-stressed combined dies of tappet body with inner pressure, by comparing the analyzed results, uniform strength theory is sufficiently understood, which is applied to practical engineering research such as cold extrusion die and vortex compressor inner-wall pressure and so on.

Key words: strength theory; equivalent stress; different tension and compression; engineering application

责任编辑:李翠薇