文章编号:1672 -058X(2013)04 -0005 -03

双重逆极限空间上移位映射的刚性和几乎等度连续性*

张 洁, 金渝光
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要: 研究了非空紧致度量空间上连续映射$f:X\rightarrow X$,$g:X\rightarrow X$的双重逆极限空间上移位映射$\sigma_f\circ\sigma_g$:$\underleftarrow{\lim}(X,f\circ g)\rightarrow\underleftarrow{\lim}(X,f\circ g)$的一些性质;如果$f$,$g$为满射,则移位映射$\sigma_f\circ\sigma_g$为弱刚性的(一致刚性的)当且仅当$f\circ g$为弱刚性的(一致刚性的);若$f\circ g$为几乎等度连续的,则$\sigma_f\circ\sigma_g$也是几乎等度连续的.

关键词: 双重逆极限空间;移位映射;弱刚性;一致刚性;几乎等度连续性
中图分类号: O168.1 **文献标志码:** A

1 基本概念和定义

以下基本概念引自文献[1]或[2].

设X为非空紧致度量空间,$f:X\rightarrow X$,$g:X\rightarrow X$都是连续映射且满足$f\circ g=g\circ f$,记集合$\tilde{X}=\{\tilde{x}=(x_{i,j})_{i,j=-\infty}^{+\infty}:f^m g^n(x_{i,j})=x_{i-m,j-n},\forall m,n\geqslant 0,\forall i,j\in Z\}$,显然$f^i g^j(x_{i,j})=x_{0,0}$,$\tilde{X}\subset\prod_{i,j\in Z}X_{i,j}$(其中$X_{i,j}=X$),以后把$\tilde{X}$中的点$\tilde{x}=(x_{i,j})_{i,j=-\infty}^{+\infty}$都简记为$(x_{i,j})$.

在$\tilde{X}$上引进度量$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty}\dfrac{d(x_{i,j},y_{i,j})}{2^{|i|+|j|}}$,$\forall\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{X}$,其中$d$为$X$上的度量,则空间$(\tilde{X},\tilde{d})$称为双重序列$\{X,f\circ g\}$的双重逆极限空间,并记$\tilde{X}=\underleftarrow{\lim}(X,f\circ g)$,则$\tilde{X}$为非空紧致度量空间.

定义移位映射,$\sigma_f\circ\sigma_g:\underleftarrow{\lim}(X,f\circ g)\rightarrow\underleftarrow{\lim}(X,f\circ g)$为$\sigma_f^m\circ\sigma_g^n((x_{i,j}))=(x_{i-m,j-n})$,$\forall\tilde{x}=(x_{i,j})\in\tilde{X}$,$\sigma_f\circ\sigma_g$为$\tilde{X}$上的一个同胚映射,并称之为由$f\circ g$诱导出来的$\tilde{X}$上的移位映射,由于$f\circ g=g\circ f$,故$\sigma_f\circ\sigma_g=\sigma_g\circ\sigma_f$.

定义投影,对于任意$i,j\in Z$,$\pi_{i,j}:\tilde{X}\rightarrow X$为$\pi_{i,j}((x_{i,j}))=x_{i,j}$,$\forall\tilde{x}=(x_{i,j})\in\tilde{X}$,则$\pi_{i,j}$为连续开映射;并且如果$f$,$g$都为满射,$\pi_{i,j}$也是满射.

定义 1[3] $f\circ g:X\rightarrow X$称为弱刚性的,如果存在正整数序列$\{m_i\}_1^\infty\{n_j\}_1^\infty$,使得对$\forall x\in X$,$f^{m_i}g^{n_j}(x)\rightarrow x(i,j\rightarrow\infty)$.

定义 2[3] $f\circ g:X\rightarrow X$称为一致刚性的,如果存在正整数序列$\{m_i\}_1^\infty\{n_j\}_1^\infty$,使得$f^{m_i}g^{n_j}\rightarrow I_X(i,j\rightarrow\infty)$(其中$I_X$为恒等映射).

定义 3[3] $x\in X$称为$f\circ g$的等度连续点,如果对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得对$\forall y\in X$,当$d(x,y)<\delta$时有

收稿日期: 2012 -11 -22;**修回日期:** 2012 -12 -20.
* **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(No. 10971240).
作者简介: 张洁(1989-),女,陕西咸阳人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

$d(f^m g^n(x), f^m g^n(y)) < \varepsilon$ 对 $m,n \geqslant 0$ 成立.

定义 4[3] $f \circ g$ 称为几乎等度连续的,如果 $f \circ g$ 至少有一个等度连续点.

2 定理及证明

定理 1 f,g 为紧致度量空间 X 上的满射,且 $f \circ g = g \circ f$,则 $\sigma_f \circ \sigma_g$ 为弱刚性的当且仅当 $f \circ g$ 为弱刚性的.

证明 充分性 设 $f \circ g$ 为弱刚性的,则存在 $\{m_k\}_1^\infty \{n_h\}_1^\infty$,使得 $f^{m_k} g^{n_h}(x) \to x(k,h \to \infty)$,对 $\forall x \in X$ 成立. 对任意的 $\tilde{x} = (x_{i,j}) \in \tilde{X}$ 选取充分大的正整数 m,n,使得 $\frac{M}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}, \frac{M}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$,其中 $M > 0$ 为紧致度量空间 X 的直径. 又由于 $f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}) \to x_{i,j}(k,h \to \infty)$,故存在 $K_{i,j}$,当 $k,h > K_{i,j}$ 时,$d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{4}$. 令 $K = \max\limits_{|i|,|j| \leqslant m} \{K_{i,j}\}$,则当 $k,h > K$ 时,$d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{4}$. 当 $|i| > m$ 和 $|j| > n$ 时,

$$\sum_{|i|,|j|>m} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} < \frac{M}{2^m}\left(\text{或}\frac{M}{2^n}\right)$$

则当 $k,h > K$ 时,有

$$\tilde{d}(\sigma_f^{m_k} \sigma_f^{n_h}(\tilde{x}), \tilde{x}) = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} =$$
$$\sum_{|i|,|j| \leqslant m} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} + \sum_{|i|,|j|>m} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} <$$
$$\frac{\varepsilon}{4} \sum_{|i|,|j| \leqslant m} \frac{1}{2^{|i|+|j|}} + \frac{M}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\sigma_f^{m_k} \sigma_g^{n_h}(\tilde{x}) \to \tilde{x}(k,h \to \infty)$,由 $\tilde{x}$ 的任意性知 $\sigma_f \circ \sigma_g$ 为弱刚性的.

必要性 假设 $\sigma_f \circ \sigma_g$ 为弱刚性的,则存在 $\{m_k\}_1^\infty \{n_h\}_1^\infty$,使得对任意的 $\tilde{x} = (x_{i,j}) \in \tilde{X}$ 有 $\sigma_f^{m_k} \sigma_g^{n_h}(\tilde{x}) \to \tilde{x}(k,h \to \infty)$. 由于 f,g 为满射,则 $f \circ g$ 为满射,故对 $\forall x_{0,0} \in X$,存在 $\tilde{x} = (x_{i,j}) \in \tilde{X}$ 且 $\pi_{0,0}(\tilde{x}) = x_{0,0}$,$\sigma_f^{m_k} \sigma_g^{n_h}(\tilde{x}) \to \tilde{x}$,对于 $\forall \varepsilon > 0$,存在 K,当 $k,h > K$ 时,$\tilde{d}(\sigma_f^{m_k} \sigma_g^{n_h}(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$. 即 $\sum\limits_{i,j=-\infty}^{+\infty} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} < \varepsilon \Rightarrow d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{0,0}), x_{0,0}) < \varepsilon$,所以 $f^{m_k} g^{n_h}(x_{0,0}) \to x_{0,0}$,由 $x_{0,0}$ 的任意性知 $f \circ g$ 为弱刚性的.

为讨论方便,以下记 $D(f,g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))(f,g \in C(X,X))$.

定理 2 f,g 为紧致度量空间 X 上的满射,且 $f \circ g = g \circ f$,则 $\sigma_f \circ \sigma_g$ 为一致刚性的当且仅当 $f \circ g$ 为一致刚性的.

证明 充分性 假设 $f \circ g$ 为一致刚性的,则存在 $\{m_k\}_1^\infty \{n_h\}_1^\infty$,使得 $f^{m_k} g^{n_h} \to I_X(k,h \to \infty)$. 因而对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists K \in N$,当 $k,h > K$ 时,

$$D(f^{m_k} \circ g^{n_h}, I_X) = \sup_{x \in X} d(f^{m_k} g^{n_h}(x), x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow D(\sigma_f^{m_k} \circ \sigma_g^{n_h}, I_{\tilde{X}}) =$$
$$\sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \tilde{d}(\sigma_f^{m_k} \sigma_g^{n_h}(\tilde{x}), \tilde{x}) =$$
$$\sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \frac{d(f^{m_k} g^{n_h}(x_{i,j}), x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}} \leqslant$$

$$\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty}\sup_{\tilde{x}\in\tilde{X}}\frac{d(f^{m_k}g^{n_h}(x_{i,j}),x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}}<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|+|j|}}<\varepsilon$$

其中$\tilde{x}=(x_{i,j})$. 所以 $\sigma_f^{m_k}\circ\sigma_g^{n_h}\to I_{\tilde{X}}$,即 $\sigma_f\circ\sigma_g$ 为一致刚性的.

必要性　假设 $\sigma_f\circ\sigma_g$ 为一致刚性的,则存在$\{m_k\}_1^\infty\{n_h\}_1^\infty$,使得 $\sigma_f^{m_k}\circ\sigma_g^{n_h}\to I_{\tilde{X}}(k,h\to\infty)$,即对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists K\in N$,当 $k,h>K$ 时,$D(\sigma_f^{m_k}\circ\sigma_g^{n_h},I_{\tilde{X}})=\sup\limits_{\tilde{x}\in\tilde{X}}\tilde{d}(\sigma_f^{m_k}\sigma_g^{n_h}(\tilde{x}),\tilde{x})<\varepsilon$. 由于$f,g$ 为满射,所以$f\circ g$ 为满射,故对 $\forall x_{0,0}\in X$,存在$\tilde{x}=(x_{i,j})\in\tilde{X}$,且 $\pi_{0,0}(\tilde{x})=x_{0,0}$,又$\tilde{d}(\sigma_f^{m_k}\sigma_g^{n_h}(\tilde{x}),\tilde{x})\leqslant D(\sigma_f^{m_k}\circ\sigma_g^{n_h},I_{\tilde{X}})$及

$$d(f^{m_k}g^{n_h}(x_{0,0}),x_{0,0})\leqslant\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty}\frac{d(f^{m_k}g^{n_h}(x_{i,j}),x_{i,j})}{2^{|i|+|j|}}=\tilde{d}(\sigma_f^{m_k}\sigma_g^{n_h}(\tilde{x}),\tilde{x})\Rightarrow$$

$$d(f^{m_k}g^{n_h}(x_{0,0}),x_{0,0})\leqslant D(\sigma_f^{m_k}\circ\sigma_g^{n_h},I_{\tilde{X}})$$

故当 $k,h>K$ 时,对 $\forall x_{0,0}\in X$,都有 $d(f^{m_k}g^{n_h}(x_{0,0}),x_{0,0})<\varepsilon$. 从而,当 $k,h>K$ 时

$$D(f^{m_k}\circ g^{n_h},I_X)=\sup_{x\in X}d(f^{m_k}g^{n_h}(x),x)<\varepsilon$$

所以$f\circ g$ 为一致刚性的.

定理 3　设f,g 为紧致度量空间 X 上的连续映射,且$f\circ g=g\circ f$,如果$f\circ g$ 为几乎等度连续的,则 $\sigma_f\circ\sigma_g$ 也是几乎等度连续的.

证明　设$f\circ g$ 为几乎等度连续的,则存在 $x\in X$ 为$f\circ g$ 的等度连续点,因而对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得对 $\forall y\in X$,当 $d(x,y)<\delta$ 时,对 $\forall m,n\geqslant 0$ 有 $d(f^mg^n(x),f^mg^n(y))<\varepsilon$. 对任意的$\tilde{y}=(y_{i,j})\in\tilde{X}$,令$\tilde{x}=(x_{i,j})=(x)\in\tilde{X}$. 设 M 为度量空间 X 的直径,取 N 足够大,使 $\sum\limits_{|i|,|j|\geqslant N}\frac{M}{2^{|i|+|j|}}<\frac{\varepsilon}{2}$,令 $\delta'=\frac{\delta}{2^{N+N}}$,则当 $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\sum\limits_{i,j=-\infty}^{+\infty}\frac{d(x_{i,j},y_{i,j})}{2^{|i|+|j|}}<\delta'$ 时,$\frac{d(x_{N,N},y_{N,N})}{2^{N+N}}<\delta'=\frac{\delta}{2^{N+N}}$,即 $d(x_{N,N},y_{N,N})<\delta$,$d(f^mg^n(x_{N,N}),f^mg^n(y_{N,N}))<\frac{\varepsilon}{18}$,$\forall m,n\geqslant 0$,即$d(x_{i,j},y_{i,j})<\frac{\varepsilon}{18}$,$\forall i,j\leqslant N$,所以$\sum\limits_{i,j<N}\frac{d(x_{i,j},y_{i,j})}{2^{|i|+|j|}}<\frac{\varepsilon}{18}$,$\sum\limits_{i,j<N}\frac{1}{2^{|i|+|j|}}<\frac{\varepsilon}{2}$,对 $\forall m,n\geqslant 0$,有

$$\tilde{d}(\sigma_f^m\sigma_g^n(\tilde{x}),\sigma_f^m\sigma_g^n(\tilde{y}))=\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty}\frac{d(f^mg^n(x_{i,j}),f^mg^n(y_{i,j}))}{2^{|i|+|j|}}=$$

$$\sum_{i,j<N}\frac{d(x_{i-m,j-n},y_{i-m,j-n})}{2^{|i|+|j|}}+\sum_{i,j\geqslant N}\frac{d(x_{i-m,j-n},y_{i-m,j-n})}{2^{|i|+|j|}}<$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i,j\geqslant N}\frac{M}{2^{|i|+|j|}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以$\tilde{x}$为 $\sigma_f\circ\sigma_g$ 的等度连续点,故 $\sigma_f\circ\sigma_g$ 为几乎等度连续的.

参考文献:

[1] 蒋达锋. 双重逆极限空间上的动力系统[D]. 苏州:苏州大学,2005
[2] 陈媛媛,范钦杰. 双重逆极限空间上移位映射的动力性质[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2007,21(4):46-48
[3] 牛应轩. 逆极限空间上的移位映射的(几乎)等度连续性和刚性[J]. 六安师专学报,2000,16(2):11-13

(下转第 12 页)