文章编号:1672-058X(2013)04-0001-04

带有非局部源和吸收项的 P-Laplacian 方程解的熄灭*

熊 针
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:研究了方程 $u_t-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=\lambda\int_\Omega u^q(x,t)\mathrm{d}x-\beta u^r$ 解的熄灭,当 $r=1$ 时,熄灭临界指数是 $p-1=q$,用 L^p-积分范数估计方法考虑当 $r<1$ 且 $p-1=q$ 时解的熄灭情况,得到了解熄灭的充分条件和衰减估计.

关键词:P-Laplacian 方程;熄灭;非局部源

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A

1 预备知识

考虑带有非局部源和吸收项的 P-Laplacian 方程:

$$\begin{cases} u_t-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=\lambda\int_\Omega u^q(x,t)\mathrm{d}x-\beta u^r, x\in\Omega, t>0 \\ u(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1<p<2$,$0<r\leqslant 1$,$q,\lambda,\beta>0$,Ω 是 $\mathbf{R}^N(N>2)$ 中的有界光滑区域,$\partial\Omega$ 为其边界,$0\leqslant u_0(x)\in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$,且 $u_0(x)\not\equiv 0$.

解的熄灭现象是非线性抛物方程解的一个重要的性质,具有明显的实际背景,因而人们对此进行了大量研究[1-10]. 文献[11]研究了 $u_t-d\Delta u=\int_\Omega u^q(x,t)\mathrm{d}x-ku^p$ 解的熄灭,得到了 $p=q$ 是熄灭临界指数;文献[12]研究了 $u_t-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=\lambda u^q$ 解的熄灭,得到了 $p-1=q$ 是熄灭临界指数;文献[13]研究了 $u_t-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=\lambda u^r-\beta u^q$ 解的熄灭,得到了当 $q=1$ 时,$p-1=r$ 是熄灭临界指数以及当 $q<1$ 时解的熄灭情况;文献[14]研究了当 $r=1$ 时解的熄灭,得到了 $p-1=q$ 时熄灭临界指数. 此处主要考虑当 $r<1$ 时解的熄灭情况(对 $r=1$ 时,请参看文献[14]).

定义 1 设 $u(x,t)$ 是问题(1)的弱解,若存在 $T_0\in(0,+\infty)$ 使得 $u(x,t)\neq 0$,$(x,t)\in\Omega\times(0,T_0)$ 且 $u(x,t)\equiv 0$,$(x,t)\in\Omega\times[T,+\infty)$ 成立,则称解 $u(x,t)$ 在有限时间熄灭.

引理 1[12] 设 λ_1 是问题 $-\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)=\lambda|\varphi|^{p-2}\varphi$,$x\in\Omega$,$|\varphi|_{\partial\Omega}=0$ 的第一特征值,则对任意 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,有 $\lambda_1\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x$.

引理 2[13] 设 $y(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负绝对连续函数,且满足:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\alpha y^k\leqslant 0$,$t\geqslant 0$,$y(0)\geqslant 0$,其

收稿日期:2012-09-12;**修回日期**:2012-10-31.
* **基金项目**:国家自然科学基金(11071266).
作者简介:熊针(1986-),男,重庆丰都人,硕士研究生,从事偏微分方程研究.

中 $\alpha(\alpha>0)$ 是一个常数，$k\in(0,1)$，则 $y(t)\leqslant[y^{1-k}(0)-\alpha(1-k)t]^{\frac{1}{1-k}}, t\in[0,T_*)$；$y(t)\equiv 0, t\in[T_*,+\infty)$，其中 $T_*=y^{1-k}(0)/[\alpha(1-k)]$.

引理3[15] 假设 $\beta\geqslant 0, N>p\geqslant 1, \beta+1\leqslant q$ 且 $1\leqslant r\leqslant q\leqslant(\beta+1)Np/(N-p)$，则对于任意 $|u|^{\beta}u\in W^{1,p}(\Omega)$，有

$$\|u\|_q\leqslant C^{\frac{1}{1+\beta}}\|u\|_r^{1-\theta}\|\nabla(|u|^{\beta}u)\|_p^{\theta/(\beta+1)}$$

其中 $\theta=(\beta+1)(r^{-1}-q^{-1})/\{N^{-1}-p^{-1}+(\beta+1)r^{-1}\}$，$C$ 是依赖于 N,p,r 的常数.

2 主要结论及证明

定理1 当 $r<1$ 时，假设 $p-1=q$，如果 $\frac{2N}{N+2}<p<2$ 且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1$ 或者 $1<p\leqslant\frac{2N}{N+2}$ 且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1 s\left(\frac{p}{p+s-1}\right)^p$，其中 $s\geqslant\frac{2N-(N+1)p}{p}$，则对于任意非负初值问题(1)的弱解在有限时间熄灭，且有估计：

(a) 如果 $\frac{2N}{N+2}<p<2$ 且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1$，有

$$\begin{aligned}&\|u\|_2\leqslant[\|u_0\|_2^{2-k_1}-C_1(2-k_1)t]^{\frac{1}{2-k_1}}, && t\in[0,T_1)\\&\|u\|_2\equiv 0, && t\in[T_1,+\infty)\end{aligned}$$

其中 $T_1=u_{02}^{\;2-k_1}/C_1(2-k_1)$.

(b) 如果 $1<p\leqslant\frac{2N}{N+2}$ 且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1 s(\frac{p}{p+s-1})^p$，有

$$\begin{aligned}&\|u\|_{s+1}\leqslant[\|u_0\|_{s+1}^{s-k_2+1}-C_2(s-k_2+1)t]^{\frac{1}{s-k_2+1}}, && t\in[0,T_2)\\&\|u\|_{s+1}\equiv 0, && t\in[T_2,+\infty)\end{aligned}$$

其中 $T_2=\|u_0\|_{s+1}^{s-k_2+1}/C_2(s-k_2+1)$.

证明 首先考虑 $\frac{2N}{N+2}<p<2$ 且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1$ 的情况，在方程(1)两边同时乘以 u，然后在 Ω 上积分可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+\|\nabla u\|_p^p=\lambda\int_\Omega u\mathrm{d}x\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y-\beta\|u\|_{r+1}^{r+1} \tag{2}$$

由 Hölder 不等式及引理1可得：

$$\int_\Omega u\mathrm{d}x\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y\leqslant|\Omega|\|u\|_{q+1}^{q+1}\leqslant|\Omega|\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|_p^p \tag{3}$$

把式(3)带入式(2)可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+\left(1-\frac{\lambda|\Omega|}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_p^p+\beta\|u\|_{r+1}^{r+1}\leqslant 0 \tag{4}$$

由引理3可得：

$$\|u\|_2\leqslant C(N,p,r)\|u\|_{r+1}^{1-\theta_1}\|\nabla u\|_p^{\theta_1} \tag{5}$$

其中 $\theta_1=\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}+\frac{1}{r+1}\right)^{-1}=\frac{Np(1-r)}{2p(r+1)+2N(p-r-1)}$.

由 $\frac{2N}{N+2}<p<2$ 和 $r<1$ 易得 $0<\theta_1<1$. 令 $k_1=\frac{2p(r+1)+2N((p-r-1))}{2p+N(p-r-1)}$，易得 $1<k_1<2$. 对式(5)两边 k_1 次方，然后再由 Young 不等式可得：

$$\|u\|_2^{k_1}\leqslant C^{k_1}(N,p,r)\|u\|_{r+1}^{k_1(1-\theta_1)}\|\nabla u\|_p^{k_1\theta_1}\leqslant C^{k_1}(N,p,r)(\varepsilon_1\|\nabla u\|_p^p+C(\varepsilon_1)\|u\|_{r+1}^{r+1}) \tag{6}$$

其中 $\varepsilon_1>0$. 把式(6)带入式(4)可得:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+\left(1-\frac{\lambda|\Omega|}{\lambda_1}-\frac{\beta\varepsilon_1}{C(\varepsilon_1)}\right)\|\nabla u\|_p^p+\frac{\beta}{C(\varepsilon_1)C^{k_1}(N,p,r)}\|u\|_2^{k_1}\leqslant 0 \tag{7}$$

因为 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1$,取充分小的 ε_1 使得 $1-\lambda|\Omega|/\lambda_1-\beta\varepsilon_1/C(\varepsilon_1)\geqslant 0$,对于固定的 ε_1,令 $C_1=\beta/C(\varepsilon_1)C^{k_1}(N,p,r)$,则由式(7)可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2+C_1\|u\|_2^{k_1-1}\leqslant 0 \tag{8}$$

由引理 2 可得:

$$\begin{aligned}&\|u\|_2\leqslant\left[\|u_0\|_2^{2-k_1}-C_1(2-k_1)t\right]^{\frac{1}{2-k_1}}, && t\in[0,T_1)\\ &\|u\|_2\equiv 0, && t\in[T_1,+\infty)\end{aligned}$$

其中 $T_1=u_{0\,2}^{\;2-k_1}/C_1(2-k_1)$.

现在考虑 $1<p\leqslant\frac{2N}{N+2}$且 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1 s\left(\frac{p}{p+s-1}\right)^p$ 的情况,在方程(1)两边同时乘以 u^s,其中 $s\geqslant\frac{2N-(N+1)p}{p}$,然后在 Ω 上积分可得:

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{s+1}^{s+1}+\frac{sp^p}{(p+s-1)^p}\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^p=\lambda\int_\Omega u^s\mathrm{d}x\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y-\beta\|u\|_{r+s}^{r+s} \tag{9}$$

由 Hölder 不等式及引理 1 可得:

$$\int_\Omega u^s\mathrm{d}x\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y\leqslant|\Omega|\,\|u\|_{q+s}^{q+s}\leqslant|\Omega|\lambda^{-1}\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^p \tag{10}$$

把式(10)带入式(9)可得:

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{s+1}^{s+1}+\left(\frac{sp^p}{(p+s-1)^p}-\frac{|\Omega|\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^p+\beta\|u\|_{r+s}^{r+s}\leqslant 0 \tag{11}$$

由引理 3 可得:

$$\|u\|_{s+1}\leqslant C(N,s,p,r)\|u\|_{r+s}^{1-\theta_2}\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^{\theta_2 p/(p+s-1)} \tag{12}$$

其中 $\theta_2=\frac{N(p+s-1)(1-r)}{(s+1)[p(r+s)+N(p-r-1)]}$,易得 $0<\theta_2<1$.

令 $k_2=\frac{(s+1)[p(r+s)+N(p-r-1)]}{p(s+1)+N(p-r-1)}$,易得 $s<k_2<s+1$,对式(12)两边 k_2 次方,然后再由 Young 不等式可得:

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+1}^{k_2}&\leqslant C^{k_2}(N,s,p,r)\|u\|_{r+s}^{k_2(1-\theta_2)}\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^{k_2\theta_2 p/(p+s-1)}\leqslant\\ &C^{k_2}(N,s,p,r)(\varepsilon_2\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^p+C(\varepsilon_2)\|u\|_{r+s}^{r+s})\end{aligned} \tag{13}$$

把式(13)带入式(11)可得:

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{s+1}^{s+1}+\left(\frac{sp^p}{(p+s-1)^p}-\frac{|\Omega|\lambda}{\lambda_1}-\frac{\beta\varepsilon_2}{C(\varepsilon_2)}\right)\|\nabla u^{(p+s-1)/p}\|_p^p+\frac{\beta}{C(\varepsilon_2)C^{k_2}(N,s,p,r)}\|u\|_{s+1}^{k_2}\leqslant 0 \tag{14}$$

因为 $\lambda<|\Omega|^{-1}\lambda_1 s\left(\frac{p}{p+s-1}\right)^p$,取充分小的 ε_2 使得$\frac{sp^p}{(p+s-1)^p}-\frac{|\Omega|\lambda}{\lambda_1}-\frac{\beta\varepsilon_2}{C(\varepsilon_2)}\geqslant 0$,对于固定的 ε_2,令 $C_2=\frac{\beta}{C(\varepsilon_2)C^{k_2}(N,s,p,r)}$,则由式(14)可得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{s+1}+C_2\|u\|_{s+1}^{k_2-s}\leqslant 0$,由引理 2 可得:

$$\begin{aligned}&\|u\|_{s+1}\leqslant\left[\|u_0\|_{s+1}^{s-k_2+1}-C_2(s-k_2+1)t\right]^{\frac{1}{s-k_2+1}}, && t\in[0,T_2)\\ &\|u\|_{s+1}\equiv 0, && t\in[T_2,+\infty)\end{aligned}$$

其中 $T_2 = \| u_0 \|_{s+1}^{s-k_2+1} / C_2(s-k_2+1)$.

参考文献:

[1] 顾永耕. 抛物型方程的解熄灭(extinction)的充要条件[J]. 数学学报,1994,37(1):73-79

[2] 张健. 二维抛物问题解的熄灭与区域的相关性[J]. 四川师范大学学报,1995,18(4):1-3

[3] 闫莉,穆春来. 一类非线性抛物方程解的熄灭[J]. 四川大学学报,2006,43(3):514-516

[4] 王凡彬. 两类非线性发展方程组解的爆破和熄灭[J]. 重庆师范大学学报,2008,25(4)33-36

[5] ALAN V L. Finite extinction time for solutions of nonlinear parabolic equations[J]. Nonlinear Aanlysis,1993,21:1-8

[6] DIBENEDETTO E. Degenerate Parabolic Equations[M]. New York:Springer,1993

[7] KALASHNIKOV A S. The nature of the propagation of perturbations in problems of non-linear heat conduction with absorption[J]. USSR Comput, Math Math Phys,1974,14:70-85

[8] ZHOU J, MU C L. Critical blow-up and extinction exponents for non-Newton polytropic filtration equation with source[J]. Bull Korean Math Soc,2009,46:1159-1173

[9] FERREIRA R, VAZQUEZ J L. Extinction behavior for fast diffusion equations with absorption[J]. Nonlinear Anal,2001,43:943-985

[10] TIAN Y, MU C L. Extinction and non-extinction for a p-Laplacian equation with nonlinear source[J]. Nonlinear Anal,2008,69:2422-2431

[11] LIU W J. Extinction and non-extinction of solutions for a nonlocal reaction-diffusion problem[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2010,15:1-12

[12] TIAN Y, MU CH L. Extinction and non-extinction for P-Laplacian equation with nonlinear source[J]. Nonlinear Aanlysis,2008,69:2422-2431

[13] LIU W J. Extinction properties of solutions for a class of fast diffusive P-Laplacian equations[J]. Nonlinear Aanlysis. 2011,74:4520-4532

[14] FANG Z B, XU X H. Extinction behavior of solution for P-Laplacian equations with nonlocal sources[J]. Nonlinear Aanlysis:Real World Applications,2012,13:1780-1789

[15] CHEN C S, WANG R Y. L^∞ estimates of solution for the evolution m-Laplacian with initial value in $L^q(\Omega)$[J]. Nonlinear Aanlysis,2002,48:607-616

Extinction of Solutions for the P-Laplacian Equation with Nonlocal Source and Absorption Item

XIONG Zhen

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, the extinction of solutions for $u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda\int_\Omega u^q(x,t)\,\mathrm{d}x - \beta u^r$ is studied, when $r=1$, it is known that the critical extinction exponent is $p-1=q$; for $r<1$ and $p-1=q$, the extinction of solutions are studied by using L^p - integral norm estimate method, and sufficient conditions about the extinction and decay estimates of solutions are obtained.

Key words: p-Laplacian equation; extinction; nonlocal source

责任编辑:李翠薇