文章编号:1672 -058X(2013)03 -0022 -07

模糊期望值证券投资组合模型研究和实证分析*

杨　梅[1], 卢伦慧[2]
(1. 重庆电子工程职业学院 通识教育学院,重庆 401331;2. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:着眼于研究不确定环境下的投资组合问题,讨论了模糊期望值模型,创新点是把协方差引入到风险度量里面,建立一个群投资组合选择模型;选取“上证 50 指数”中的 19 支成份股进行实证分析,结合遗传算法,通过运用 MATLAB 软件编程得到了 3 种投资者各自应该采取的最优投资组合。

关键词:投资组合;模糊数;遗传算法

中图分类号:O211　　　　**文献标志码:**A

从 20 世纪中叶马科维茨提出均值-方差模型至今,投资组合问题始终是众多学者研究的热点。然而,现实中的投资者经常对预期的收益水平和风险存在主观意愿,再加上未来的收益率会随时变化,因此预期收益率以及风险的变化具有模糊性。所以,研究在三角模糊数理论基础上的投资组合问题,以便投资者能够做出最优决策,具有很重要的理论和现实意义。

在模糊理论的基础之上,着重研究了模糊期望值模型,并引入遗传算法来丰富和完善证券投资组合优化的方法和理论。

1　模糊投资组合模型的建立

假设投资者持有 n 种风险资产 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,设 δ_i, x_i 分别表示第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个风险资产的收益率和投资比例,其中 δ_i 是一个三角模糊变量,则构成模糊向量 $\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 和相应的决策向量 $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$。记投资组合总的收益率为 $f(x,\delta) = \sum_{i=1}^{n} x_i\delta_i$。

对于投资者而言,希望决策变量 $x=(x_1,x_2\cdots,x_n)$ 在满足一定的条件下使得投资组合的总收益率达最大。不妨令 $g_j(x,\delta), j=1,2,\cdots,q$,它表示关于 x 和 δ 的约束函数,具有以下形式的模糊规划模型:

$$\begin{cases} \max f(x,\delta) \\ \text{s.t.} \quad g_j(x,\delta) \leqslant 0, j = 1,2,\cdots,p \end{cases} \tag{1}$$

显然,式(1)只是一种形式上的模糊规划模型,问题的关键需要确定模糊向量 δ 和约束函数 $g(x,\delta)$。为了给出该规划模型的可行解,下面结合可信性理论,先讨论一下三角模糊变量的均值和方差问题。

收稿日期:2012 - 11 - 04;**修回日期:**2012 - 11 - 27.
* **基金项目:**重庆工商大学创新型项目(yjscxx2012-037-36).
作者简介:杨梅(1982-),女,重庆云阳人,讲师,硕士,从事概率、数理统计研究.

2　模糊期望值模型

假设预期收益率为三角模糊变量,记为(r_1,r_2,r_3),则三角模糊变量的可信性分布和可信性密度函数具体公式[1]如下。

可信性分布:

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\leqslant r_1\\ \dfrac{x-r_1}{2(r_2-r_1)} & 若\ r_1\leqslant x\leqslant r_2\\ \dfrac{x+r_3-2r_2}{2(r_3-r_2)} & 若\ r_2\leqslant x\leqslant r_3\\ 1 & 若\ r_3\leqslant x\end{cases}$$

可信性密度函数:

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(r_2-r_1)} & 若\ r_1\leqslant x\leqslant r_2\\ \dfrac{1}{2(r_3-r_2)} & 若\ r_2\leqslant x\leqslant r_3\\ 0 & 其他\end{cases}$$

对于特殊的对称三角模糊变量,记为$\delta=(r_2-c,r_2,r_2+c)$,其中$c>0$。显然有$E(\delta)=r_2$。则有:

$$V[\delta]=E[(\delta-E(\delta))^2]=E[(\delta-r_2)^2]=$$
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}((\delta-r_2)^2\geqslant r)\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^0\mathrm{Cr}((\delta-r_2)^2\leqslant r)\mathrm{d}r$$

由于

$$\mathrm{Pos}[(\delta-r_2)^2=r]=\mathrm{pos}[(\delta-r_2=\sqrt{r})\cup(\delta-r_2=-\sqrt{r})]=$$
$$\mathrm{pos}[(\delta-r_2=\sqrt{r})\vee\mathrm{pos}(\delta-r_2=-\sqrt{r})]$$

所以

$$\mathrm{Pos}[(\delta-r_2)^2\geqslant r]=\begin{cases}\dfrac{c-\sqrt{r}}{c} & 0\leqslant r\leqslant c^2\\ 0 & r\geqslant c^2\end{cases}$$

$$\mathrm{Cr}[(\delta-r_2)^2\geqslant r]=\begin{cases}\dfrac{c-\sqrt{r}}{2c} & 0\leqslant r\leqslant c^2\\ 0 & r\geqslant c^2\end{cases}$$

因为$c>0$,所以$V[\delta]=\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}((\delta-r_2)^2\geqslant r)\mathrm{d}r=\frac{c^2}{6}$。然而对于一般的三角模糊变量,为了便于书写,不妨令三角模糊变量为$\delta=(r_2,\alpha,\beta)$,其中$\alpha$为三角模糊变量的左宽度,$\beta$为三角模糊变量的右宽度,且$\alpha>0$,$\beta>0$。则易于计算$E(\delta)=\frac{1}{4}(4r_2-\alpha+\beta)$。为便于讨论,不妨令$E(\delta)=l$,类似于对称三角模糊变量,下面分两种情况讨论三角模糊变量δ的方差。

① 当$\alpha>\beta$时,则:

$$\mathrm{Pos}[(\delta-l)^2\geqslant r]=\begin{cases}1 & 0\leqslant r\leqslant(r_2-l)^2\\ \dfrac{r_2+\beta-l-\sqrt{r}}{\beta} & (r_2-l)^2\leqslant r\leqslant r_s\\ \dfrac{-\sqrt{r}-(r_2-\alpha-l)}{\alpha} & r_s\leqslant r\leqslant(r_2-\alpha-l)^2\\ 0 & (r_2-\alpha-l)^2\leqslant r\end{cases}$$

并且

$$\mathrm{Cr}[(\delta-l)^2\geqslant r]=\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt{r}-(r_2-\alpha-l)}{2\alpha} & 0\leqslant r\leqslant(r_2-l)^2\\ \dfrac{r_2+\beta-l-\sqrt{r}}{2\beta} & (r_2-l)^2\leqslant r\leqslant r_s\\ \dfrac{-\sqrt{r}-(r_2-\alpha-l)}{2\alpha} & r_s\leqslant r\leqslant(r_2-\alpha-l)^2\\ 0 & (r_2-\alpha-l)^2\leqslant r\end{cases}$$

其中,$r_s=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{16}$。

则,$V[\delta]=\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}((\delta-r_2)^2\geqslant r)\mathrm{d}r=\dfrac{33\alpha^3+11\alpha\beta^2+21\alpha^2\beta-\beta^3}{384\alpha}$。

② 当 $\alpha<\beta$ 时,则:

$$\mathrm{Pos}[(\delta-l)^2\geqslant r]=\begin{cases}1 & 0\leqslant r\leqslant(r_2-l)^2\\ \dfrac{-\sqrt{r}-(r_2-\alpha-l)}{\alpha} & (r_2-l)^2\leqslant r\leqslant r_s\\ \dfrac{r_2+\beta-l-\sqrt{r}}{\beta} & r_s\leqslant r\leqslant(r_2+\beta-l)^2\\ 0 & (r_2+\beta-l)^2\leqslant r\end{cases}$$

并且

$$\mathrm{Cr}[(\delta-l)^2\geqslant r]=\begin{cases}1-\dfrac{r_2+\beta-l+\sqrt{r}}{2\beta} & 0\leqslant r\leqslant(r_2-l)^2\\ \dfrac{-\sqrt{r}-(r_2-\alpha-l)}{2\alpha} & (r_2-l)^2\leqslant r\leqslant r_s\\ \dfrac{r_2+\beta-l-\sqrt{c}}{2\beta} & r_s\leqslant r\leqslant(r_2+\beta-l)^2\\ 0 & (r_2+\beta-l)^2\leqslant r\end{cases}$$

其中,$\delta_s=\dfrac{(\alpha+\beta)}{16}$。

则,$V[\delta]=\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}((\delta-r_2^2)\geqslant r)\mathrm{d}r=\dfrac{33\beta^3+11\alpha^2\beta+21\alpha\beta^2-\alpha^3}{384\beta}$。

根据上述分析以及马克维茨的均值-方差模型,由此得到以三角模糊变量作为收益率的模糊均值-方差模型:

$$\begin{gathered}\max E[f(x,\delta)]\\ \min V[f(x,\delta)]\end{gathered}\tag{2}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad x_i \geqslant 0 \ i = 1,2,\cdots,n$$

式(2)是一个双目标规划模型,采用加权法转化为单目标规划模型:

$$\begin{aligned} &\max \quad \tau E[f(x,\delta)] - (1-\tau)V[f(x,\delta)] \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{3}$$

权重系数 $\tau \in [0,1]$,它的取值可以依据投资者能够承担风险的程度而定。如果 τ 越大,那么投资者越倾向于风险,是典型的风险偏好型投资者;如果 τ 越小,那么投资者越远离风险,是典型的风险规避型投资者;在极端情况下,如果 $\tau = 1$,那么投资者会完全忽略风险的存在;如果 $\tau = 0$,那么投资者会非常保守,并且只考虑投资中存在的风险而不考虑收益。

假设市场上有 n 种风险资产,去收益率向量为 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$,$r_j$ 为三角模糊数,$r_j = (r_j^l, r_j^c, r_j^u)$,投资者投资此 n 种风险资产的组合记为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则资产的收益率为$\bar{r}$:

$$\bar{r} = \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j \cdot x_j = (r^l, r^c, r^u)$$

其中 $r^l = \sum_{j=1}^{n} r_j^1 \cdot x_j, r^c = \sum_{j=1}^{n} r_j^c \cdot x_j, r^u = \sum_{j=1}^{n} r_j^u \cdot x_j$,$x_j$ 为投资第 j 只证券的比例。

由文献[4、5]中提出的模糊数的定义,可以得到如下的组合收益率 $E(\bar{r})$:

$$E(\bar{r}) = E\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3} r_j^c + \frac{r_j^u + r_j^1}{6}\right) x_j$$

其协方差矩阵为 $\sum = (\sigma_{ij})_{n \times n}$, 并且有:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(r_i^u - r_i^l)^2}{24} & i = j \\ \dfrac{(r_i^u - r_i^l)(r_j^u - r_j^l)}{24} & i \neq j \end{cases}$$

将组合收益率的协方差定义为投资风险,其均值定义为预期收益,以此来建立一个群投资组合选择模型,构造的模型如下:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(r_i^u - r_i^1)(r_j^u - r_j^l)}{24} x_i y_j \\ &\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3} r_j^c + \frac{r_j^u + r_j^l}{6}\right) x_j \geqslant c \\ &\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4}$$

模型(4)的最优解是投资者将资金投资在各个证券之间的比例,模型的最优值是在既定收益水平下的最小风险。由于每一个预期收益率都和各自的风险水平形成一个互相对应的映射,故由此可以得到投资者的预期收益率和未来不确定风险的有效边界曲线。

3　实例分析

3.1　股票选择

选取“上证 50 指数”中的 19 种成份股进行投资组合分析,分别为工商银行、保利地产、华夏银行、贵州茅台、中国银行、武钢股份、浦发银行、中金黄金、包钢稀土、中国神华、金钼股份、潞安环能、中信证券、大秦铁路、中国石化、中国人寿、国阳新能、上海汽车、中国远洋。

依据前面的假设,所选取的19支股票的未来收益率是三角模糊数,记为(γ,α,β)。α代表股票的左宽度,β代表股票的右宽度,γ代表三角模糊数的中心值。一般来说,确定参数(γ,α,β)有两种方法:一是专家判断法,它是利用专家知识和经验,依据其判断得出一定的结论数值;二是模糊频数统计法,即利用统计软件,构造频数统计图,近似地得出三角模糊数。

在这里,采用第二种方法估计三角模糊数的3个参数,以“包钢稀土(600111)”为例:搜集了它在2009.04.01–2012.03.31三年间的周收益率;然后对其平滑后求算术平均,得到平均周收益率,即为三角模糊数的中心值γ;最后,算出周收益率区间段的最小值、最大值和中心值γ之间的距离。在SPSS软件平台上,通过计算分别得到α、β。如表1所示。

表1 每支股票的3个参数值

股票名称	中心值	左宽度	右宽度	股票名称	中心值	左宽度	右宽度
包钢稀土	0.009 936	0.558 172	0.379 440	中信证券	-0.003 990	0.431 040	0.379 045
保利地产	-0.001 319	0.303 713	0.333 016	大秦铁路	-0.003 790	0.163 296	0.179 509
工商银行	-0.037 633	0.941 007	0.323 347	潞安环能	0.007 627	0.526 237	0.328 717
贵州茅台	0.001 033	0.158 201	0.195 367	浦发银行	-0.004 870	0.309 318	0.221 527
国阳新能	0.008 389	0.633 410	0.502 822	上海汽车	-0.002 230	0.894 094	0.281 528
华夏银行	0.002 838	0.244 573	0.234 397	武钢股份	-0.004 090	0.230 675	0.281 070
金钼股份	0.005 570	0.241 151	0.316 689	中国人寿	-0.000 630	0.222 908	0.298 378
中国石化	-0.001 100	0.183 807	0.212 392	中国神华	-0.000 630	0.266 274	0.360 523
中国远洋	-0.003 550	0.297 852	0.267 978	中国银行	-0.002 940	0.158 900	0.244 084
中金黄金	-0.000 720	0.483 248	0.404 254				

由于模糊期望值的模型是一个多目标规划问题,因此这里为了求解的方便,引入一个加权系数τ,借此把复杂的多目标规划问题转化为相对比较简单的单目标规划问题。另外,由于每个投资者对未来收益有各自的预期,而投资者个人素质的不同将会导致预期收益的不同,因此依据上述的模糊期望值模型,投资者可以考虑模糊收益率,来设定所适合的τ值,借此来反映每个个体对于股票未来不确定收益的预期。显然,τ的取值范围为:$[0,1]$。

在模型中,如果投资者属于风险偏好型,即更偏向于高风险高收益,那么τ取值较大;而如果投资者是风险规避的类型,那么他会倾向于较低风险和较低收益,那么τ取值较小;如果投资者属于中性型,那么τ取值在中间范围。

在用上述选定的19支股票进行投资时,假设购买每支股票的最小比例为0.01,购买的最大比例为0.1,购买的最小单位比例为0.000 1。因此,在遗传算法中的具体参数设置为:种群为100,交叉概率为0.6,变异概率为0.2。从线性代数的角度来说,采用这样的处理方式,会使得在程序上更容易得到运行。交叉概率设置为60%,即一边是是60%,另一边是40%,两边的基因都得到了较好的保留。

采用MATLAB编程,并且在程序中分别针对风险偏好型、风险规避型和风险中性型3种投资者进行计算分析,得到了针对这三类投资者的投资策略。MATLAB的程序就不再累述。

3.2 运行结果分析

(1)如果投资者对证券未来的收益持乐观态度,并且他是风险偏好者,那么取$\tau=0.95$,经过迭代100次后,可以得到最优的投资组合策略,并且最优值是0.215 6。种群均值的变化,如图1所示。

图1说明程序的迭代过程是朝着目标函数值变化较大的方向变化,并且逐渐逼近目标函数的最大值,由此确定最佳的投资策略。经过迭代,目标函数值是0.215 6。风险偏好型投资者的投资组合情况如图2。

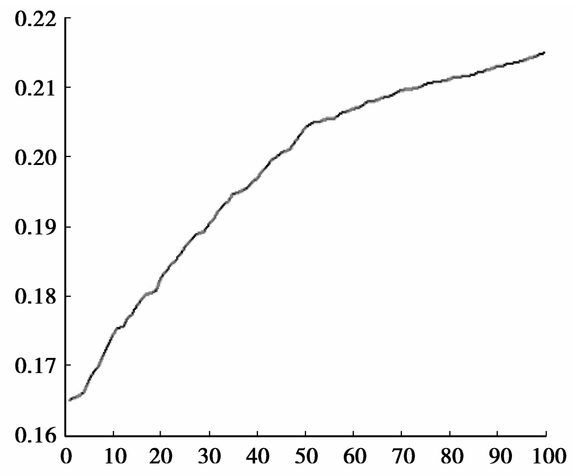

图 1　种群均值变化

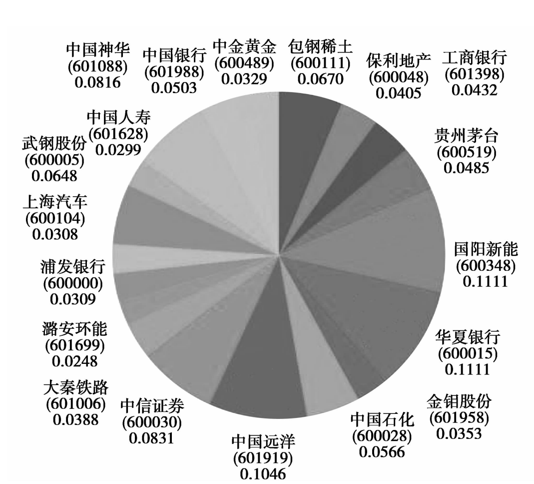

图 2　投资组合

(2) 若投资者对未来的投资收益是悲观态度,并且持风险规避态度,这里取 $\tau = 0.15$,经过 100 次迭代得到投资者的投资策略,目标函数值为 0. 184 9,种群均值的变化图如下,见图 3,而投资组合如图 4 所示。

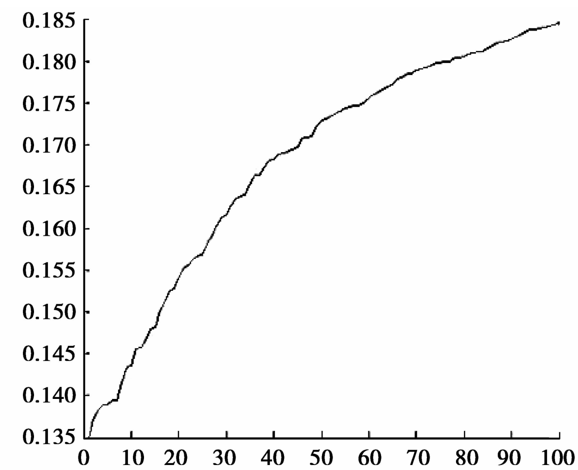

图 3　种群均值变化

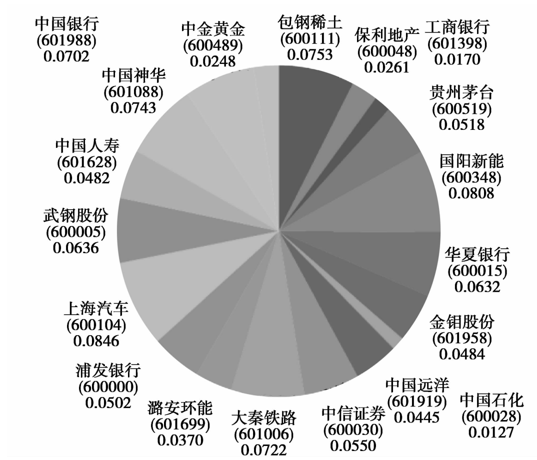

图 4　投资组合

(3) 如果投资者对未来的收益既不看好也不悲观,并且对风险持中性态度,那么在程序运行时取 $\tau = 0.5$,经过迭代 100 次后,得到投资组合策略。其最优值是 0. 197 2,其种群的变化情况如下图 5 所示,而投资组合如图 6 所示。

考虑两种极端情况:

第一种情况是在 $\tau = 0$ 时,即投资者极其地保守,在进行投资决策时仅仅考虑风险最小化,而不考虑每支股票的收益。

第二种情况是在 $\tau = 1$ 时,即投资者走向了另一个极端,完全不考虑投资的风险,而仅仅考虑每支股票能够带来的高收益。

通过模型和程序运行可以看出,在不同的权数下,不同类型的投资者所采用的投资策略是不同的。例如:风险偏好型投资者倾向于高风险、高收益,在个人主观上是期望获得高收益,在模型中取 $\tau = 0.95$ 时,目标函数值为 0. 215 6,在模拟的 3 种情况下处于最大状态;风险规避型投资者倾向于低风险、低收益,在个人主观上期望投资的风险最低,在模型中取 $\tau = 0.15$ 时,目标函数值为 0. 184 9,在所模拟的 3 种情况下处于最小状态;风险中性型投资者倾向于客观看待,既不盲目悲观,也不盲目乐观,在模型中取 $\tau = 0.5$ 时,目标函数

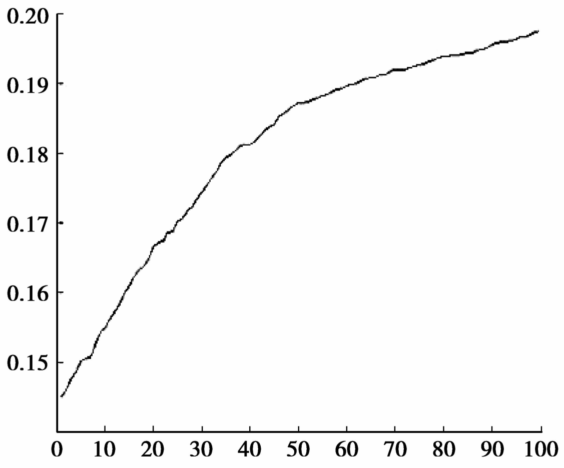

图5 种群均值变化

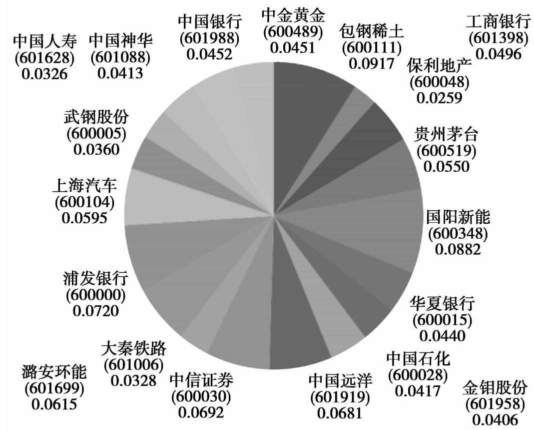

图6 投资组合

值为0.197 2,在模拟的3种情况下处于中间状态。相对而言,这种情况更接近于实际情况。

创新点是将多种证券的协方差考虑到模型中,以弥补以往研究的缺陷;在选取“上证50指数”中的19支成份股中,采用模糊频数法确定每支股票的模糊收益率、左、右宽度,然后结合遗传算法,通过运用MATLAB软件编程得到了3种投资者各自应该采取的最优投资组合。

参考文献:

[1] 刘宝碇, 赵瑞清, 王纲. 不确定规划及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2003

[2] 崔海波, 赵希男, 张利兵. 一种证券投资风险度量方法的应用研究[J]. 系统工程,2004,22(3):88-91

[3] 范宝珠, 滕成业, 朱庆华. 非负约束下含无风险证券的投资组合方法[J]. 中山大学学报:自然科学版,2001(3):25-28

[4] CARLSSON C, FULLER R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001,122:315-326

[5] GUO P J,TANAKA H. Decision analysis based on fused double exponential possibility distributions[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 148:467-479

Empirical Analysis and Research on Fuzzy Expectation Securities Investment Portfolio Model

YANG Mei[1] , LU Lun-hui[2]

(1. General Education School, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In order to study investment portfolio under uncertain environment, this paper mainly discusses fuzzy expectation model by innovatively introducing covariance into risk measurement, sets up a group investment portfolio selection model, makes empirical analysis by choosing 19 constituent stocks of Shanghai Stock Exchange 50 Index and obtains the optimal investment portfolio which should be implemented by each of three kinds of investors by combining genetic algorithm and by using MATLAB software programming.

Key words: investment portfolio; fuzzy number; genetic algorithm

责任编辑:田 静