文章编号:1672 -058X(2013)03 -0011 -02

关于共轭算子一个性质证明的纠误*

任晓花, 刘　倩
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘　要:指出了夏道行所编“实变函数与泛函分析”一书第 6 章第 4 节共轭算子的性质:$(A^*)^* = A$ 证明过程的错误,并给出了详细的证明.

关键词:共轭算子 ;内积空间 ;Hilbert 空间

中图分类号:O177　　**文献标志码:**A

定义 1　内积空间:设 Λ 是实数域或者复数域,H 是 Λ 上的线性空间,如果对于 H 中任何两个向量 x,y,都对应着一个数$(x,y)\in\Lambda$,满足条件:

(i) 共轭对称性:对任何 $x,y\in H$,$(x,y)=\overline{(y,x)}$.

(ii) 对第一变元的线性:对任何 $x,y,z\in H$ 及任何两数 $\alpha,\beta\in\Lambda$,成立着$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$.

(iii) 正定性:对于一切 $x\in H$,$(x,x)\geqslant 0$,而且$(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=0$.

则称$(\cdot,\cdot)$为 H 的内积,如果 H 上定义了内积,当 Λ 是实数(或复数)域时,称 H 为实(或复)内积空间.

定义 2　Hilbert 空间:完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

定义 3　共轭算子:设 H 和 G 是两个内积空间,A 是 $H\to G$ 的有界线性算子,又设 A^* 是 $G\to H$ 的有界线性算子,适合

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad x\in H,y\in G$$

则称 A^* 是 H 的共轭算子或伴随算子.

定理 1[1]　设 G 是内积空间,H 是 Hilbert 空间,A 是 $H\to G$ 的有界线性算子,则必有 $G\to H$ 的唯一有界线性算子 B,使得对任何 $x\in H,y\in G$,有

$$(Ax,y)=(x,By) \tag{1}$$

式(1)中左方的$(\cdot,\cdot)$表示 G 的内积,而右方的$(\cdot,\cdot)$表示 H 中的内积.

共轭算子的性质共有 6 条,其中第一条证明有误,故此处只转述性质一.

定理 2[1]　设 H 和 K 是 Hilbert 空间,G 是内积空间,$A,B\in B(H\to G)$,α,β 是复数,又 $C\in B(K\to H)$,则(i) $(A^*)^*=A$. 对于该性质书中是如此证明的:

证明　对任何 $x\in H,y\in G$,因为$(Ax,y)=(x,A^*y)$,所以$(A^*y,x)=(y,Ax)$,立即得到结论$(A^*)^*=A$.

此处的因果关系并不存在,因为由条件不能推出$(A^*y,x)=(y,(A^*)^*x)$,若该结论成立,尚需证当 $A\in B(G\to H)$时,$(Ay,x)=(y,A^*x)$.

如下给出正确证明:

收稿日期:2012 -09 -21;**修回日期:**2012 -11 -14.
* **基金项目:**西南大学博士基金项目(SWUB2006053).
作者简介:任晓花(1986-),女,河南濮阳人,硕士研究生,从事代数数论方向的研究.

证明 因为 Ran$(A)\subset G$,且 Ran(A)是闭的内积空间,把 G 完备化为$\overline{G}$. 则 $A\in B(G\to H)$,从而$\overline{A}\in B(\overline{G}\to H)$.

对 $\forall x\in\frac{\overline{G}}{G}$, $\exists$序列$\{x_n\}\subset G, x_n\to x, Ax_n$ 是 H 中的 Cauchy 序列,H 是完备的,所以 Ax_n 有极限,

$$\|\overline{A}x\| = \begin{cases}\|Ax\|, x\in G\\ \lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n\| \leqslant \|A\| \lim\limits_{x\to\infty}\|x_n\| = \|A\|\ \|x\|, x\in\overline{G}\end{cases}$$

所以 $\|\overline{A}\|$ 有界. 故

$$(\overline{A}y,x) = (y,\overline{A}^*x),\ \forall y\in\overline{G}, x\in H \tag{2}$$

成立.

则 $y\in G$ 时,式(2)也成立,从而$(A^*y,x)=(y,(A^*)^*x)$. 即有$(A^*)^*=A$.

证毕.

参考文献:

[1] 夏道行,吴卓人. 实变函数轮与泛函分析[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,1985

[2] 胡适耕. 泛函分析 [M]. 北京:高等教育出版社,2001

[3] 张恭庆,郭懋正. 泛函分析讲义:下册[M]. 北京:北京大学出版社,2009

Correction on the Proof of a Property for Adjoint Operator

REN Xiao-hua, LIU Qian

(Mathmatical College, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper points out a mistake about the proof an adjoint operator´s property $(A^*)^*=A$, which exists in the Part 4 of Chapter 6 of *The Real Variable Function and Functional Analysis* compiled by Daoxing Xia, and gives the detailed proof.

Key words: adjoint operator ; inner product space ; Hilbert space

责任编辑:李翠薇