文章编号:1672 -058X(2013)03 -0005 -06

一类非线性抛物方程解的爆破时间估计*

王勤锋,周寿明
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:主要研究带有第三界边界条件的非线性抛物方程解的爆破现象, 建立一系列微分不等式,给出了爆破时间的下界估计, 最后给出了方程解不爆破的条件.

关键词:爆破;爆破时间估计;非线性抛物方程

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A

非线性抛物方程解的爆破现象在过去几十年内已经得到了很多人的关注,在文献[1-7]中, 他们研究了一些线性抛物方程解的全局存在、局部存在、解的爆破、爆破速率、爆破集、爆破时间上界估计. 然而,比较难得到爆破时间的一个下界估计.

在 2008 年,Payne, Philippin 和 Schaefer 等人在文献[8]中考虑了下列一类带有齐次边界条件方程解的爆破现象

$$u_t = \mathrm{div}(\rho(|\nabla u|^2)\nabla u) + f(u), (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{1}$$

当 ρ 是一个 C^1 函数,而且满足

$$\rho(s) + s\rho'(s) > 0, s > 0 \tag{2}$$

他们得到了爆破时间的一个下界估计.

进一步,在 2009 年, Li, Liu 和 Lin 在文献[10]中考虑了问题(1)的第三界边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ku = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{3}$$

并且给出了爆破时间的一个下界估计以及非爆破条件.

在 2011 年, Li, Liu 和 Xiao 在文献[11]中研究了下列带有第三界边界条件的方程

$$u_t = \nabla[(|\nabla u|^p + 1)\nabla u] + f(u), (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{4}$$

容易验证在方程(4)中,$\rho(|\nabla u|^2) = |\nabla u|^p + 1$ 并不满足 Payne 等人在研究这类方程时所限制的条件(2), 但作者依然得到了爆破时间的一个下界估计. 受上述工作的启发,讨论下面一类非线性抛物方程的爆破时间的下界估计

$$\begin{cases} u_t = \nabla[(|\nabla u|^p + u^m)\nabla u] + f(u), (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + ku = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) \geqslant 0, x \in \Omega \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为带有光滑边界的有界凸区域,$0 \leqslant m \leqslant 1$, $k > 0$,函数 $f(x)$ 满足 $0 < f(s) \leqslant a_1 + a_2 s^q$, $s > 0$, $a_1 > 0$,

收稿日期:2012 -10 -24;修回日期:2012 -11 -21.

* 基金项目:国家自然科学基金(11071266).

作者简介:王勤锋(1986-),男,河南驻马店人,硕士研究生,从事偏微分方程的研究.

$a_2 > 0$.

1 主要结果

定理 1 如果 $u(x,t)$ 是方程(5)的解，若 $q-1-p>0$，则 $u(x,t)$ 不会在 $(0,t^*)$ 内发生爆破. 其中 $t^* = \int_{\phi(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{A_1\eta^{\zeta_1} + A_2\eta^{\zeta_2} + A_3\eta^{\zeta_3} + A_4\eta^{\zeta_4}}, \phi(t) = \int_\Omega u^{(n-1)(p+2)+2}\mathrm{d}x = \int_\Omega u^\sigma \mathrm{d}x, n > 1$.

定理 2 如果 $u(x,t)$ 是方程(5)的解，且 $q-1-p<0$，则 $u(x,t)$ 不会在有限时间内爆破.

2 主要结果及证明

下面给出定理 1 和定理 2 的证明,首先给出定理 1 的证明,之后证明定理 2.

定理 1 的证明

证明 对 ϕ 求导,有

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sigma\int_\Omega u^{\sigma-1}[\nabla((|\nabla u|^p + u^m)\nabla u) + f(u)]\mathrm{d}x = \\ &\sigma\int_{\partial\Omega} u^{\sigma-1}(|\nabla u|^p + u^m)\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}s - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{\sigma-2}(|\nabla u|^p + u^m)|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \sigma\int_\Omega u^{\sigma-1}f(u)\mathrm{d}x \leqslant \\ &-\sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{\sigma-2}|\nabla u|^{p+2}\mathrm{d}x - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \sigma\int_\Omega u^{\sigma-1}f(u)\mathrm{d}x \end{aligned}\tag{6}$$

再由 f 的限制条件及 $|\nabla u^n|^2 = n^2u^{2n-2}|\nabla u|^2$，有

$$\begin{aligned}\phi'(t) \leqslant &\frac{-\sigma(\sigma-1)}{n^{p+2}}\int_\Omega |\nabla u^n|^{p+2}\mathrm{d}x - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \\ &\sigma a_1\int_\Omega u^{\sigma-1}\mathrm{d}x + \sigma a_2\int_\Omega u^{\sigma-1+q}\mathrm{d}x \leqslant \\ &\frac{-\sigma(\sigma-1)}{n^{p+2}}\int_\Omega |\nabla u^n|^{p+2}\mathrm{d}x - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \\ &a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a_2\sigma\int_\Omega u^{\sigma-1+q}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积,设 $v=u^n$，故

$$\begin{aligned}\phi'(t) \leqslant &\frac{-\sigma(\sigma-1)}{n^{p+2}}\int_\Omega |\nabla v|^{p+2}\mathrm{d}x - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \\ &a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sigma a_2\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\beta = q-1-p>0$，现在考虑 $\int_\Omega |\nabla v|^{p+2}\mathrm{d}x$ 这一项.

因为 $|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2 = \frac{(p+2)^2}{4}v^p|\nabla v|^2$,由 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{(p+2)^2}{4}v^p|\nabla v|^2\mathrm{d}x \leqslant \\ \frac{(p+2)^2}{4}\left(\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+2}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^{p+2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+2}}\end{aligned}\tag{9}$$

由 Poincare 不等式

$$\lambda_1\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v^{\frac{p+2}{2}}\frac{\partial v^{\frac{p+2}{2}}}{\partial\nu}\mathrm{d}s\tag{10}$$

其中 λ_1 是问题(11)的第一正的特征值.

$$\begin{cases}\Delta\omega+\lambda\omega=0, x\in\Omega\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}+k\omega=0, x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{11}$$

可以得到

$$\lambda_1\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x+c_1\int_{\partial\Omega}v^{p+2}\mathrm{d}s \tag{12}$$

其中 $c_1=\dfrac{nk(p+2)}{2}$, 下面处理$\int_{\partial\Omega}v^{p+2}\mathrm{d}s$ 这一项,由散度定理,有

$$\int_{\partial\Omega}x_i\nu_iv^{p+2}\mathrm{d}s\leqslant\int_\Omega(x_i)_{x_i}v^{p+2}\mathrm{d}x+(p+2)\int_\Omega x_iv^{p+1}|v_{x_i}|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$3\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x+2\Big(\int_\Omega x_ix_iv^{p+2}\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

由于 Ω 是凸集,可定义

$$\rho=\min_{\partial\Omega}x_i\nu_i, d^2=\max_\Omega x_ix_i \tag{14}$$

则式(13)可转化为

$$\int_{\partial\Omega}v^{p+2}\mathrm{d}s\leqslant\frac{3}{\rho}\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x+\frac{2d}{\rho}\Big(\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\Big(\frac{3}{\rho}+\Big(\frac{d}{\rho}\Big)^2\theta\Big)\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x+\theta^{-1}\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x \tag{15}$$

$\theta>0$, 联合式(12)和式(15),则有

$$\Big(\lambda_1-\frac{3c_1}{\rho}-\Big(\frac{d}{\rho}\Big)^2c_1\theta\Big)\int_\Omega v^{p+2}\mathrm{d}x\leqslant(1+\theta^{-1}c_1)\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x \tag{16}$$

在这里限制凸集 Ω 满足

$$\lambda_1-\frac{3c_1}{\rho}>0 \tag{17}$$

然后选择足够小的 θ,使得 $\lambda_1-\dfrac{3c_1}{\rho}-\Big(\dfrac{d}{\rho}\Big)^2c_1\theta>0$,把式(16)代入式(9),有

$$\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x\leqslant c_2\int_\Omega|\nabla v|^{p+2}\mathrm{d}x \tag{18}$$

其中 $c_2=\Big[\dfrac{(p+2)^2}{4}\Big]^{p+2}\left[\dfrac{1+\theta^{-1}c_1}{\lambda_1-\frac{3c_1}{\rho}-\left(\frac{d}{\rho}\right)^2c_1\theta}\right]^{\frac{p}{2}}>0$, 联合式(8)和式(18)有

$$\phi'(t)\leqslant\frac{-\sigma(\sigma-1)}{n^{p+2}c_2}\int_\Omega|\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x-\sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{\sigma-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$
$$a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\sigma a_2\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x \tag{19}$$

接着处理式(19)中的 $\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x$, 令 $l=\dfrac{\sigma}{2n}+\dfrac{p+2}{2}$, 使用 Hölder 不等式,有

$$\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_\Omega v^{\frac{3l}{2}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}}|\Omega|^{\left(1-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}\right)} \tag{20}$$

为了使 $p+2+\dfrac{\beta}{n}<\dfrac{3l}{2}$, 限制 $q<\dfrac{2n(p+2)+p+4}{4}$,利用文献[10]的一个不等式

$$\left(\int_\Omega v^{\frac{3l}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}} \leqslant \frac{2^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}-1}}{3^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}}\left(\left(\frac{3}{2\rho}\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}} |\Omega|^{\frac{\beta}{2nl}}\left(\int_\Omega v^{\frac{\sigma}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}\left(\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2}{2l}} + \frac{1}{4}\frac{l}{p+2}\left(\frac{d}{\rho}+1\right)\left(\int_\Omega v^{\frac{\sigma}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}\left(\int_\Omega |\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}\right) \tag{21}$$

运用不等式 $a^r b^s \leqslant ra+bs, r+s=1, a,b>0$. 由式(20)和(21),得到

$$\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x \leqslant k_1\left(\int_\Omega v^{\frac{\sigma}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{2\sigma}{n}}} + k_2\varepsilon_1\int_\Omega v^{p+2+\frac{\beta}{n}}\mathrm{d}x + k_3\left(\int_\Omega v^{\frac{\sigma}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\sigma-\beta}} + k_4\varepsilon_2\int_\Omega |\nabla v^{\frac{p+2}{2}}|^2\mathrm{d}x \tag{22}$$

在这里

$$\begin{cases} k_1 = |\Omega|^{\left(1-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}\right)}\dfrac{2^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}-1}}{3^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}}\left(\dfrac{3}{2\rho}\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}}|\Omega|^{\frac{\beta}{2nl}}\dfrac{\sigma}{2nl}\varepsilon_1^{-\frac{n(p+2)}{\sigma}} \\ k_2 = |\Omega|^{\left(1-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}\right)}\dfrac{2^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}-1}}{3^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}}\left(\dfrac{3}{2\rho}\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}}|\Omega|^{\frac{\beta}{2nl}}\dfrac{p+2}{2l} \\ k_3 = |\Omega|^{\left(1-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}\right)}\dfrac{2^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}-1}}{3^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}}\dfrac{1}{4}\dfrac{l}{p+2}\left(\dfrac{d}{\rho}+1\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}}\dfrac{\sigma-\beta}{2nl}\varepsilon_2^{-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\sigma-\beta}} \\ k_4 = |\Omega|^{\left(1-\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{3l}{2}}\right)}\dfrac{2^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}-1}}{3^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l}}}\dfrac{1}{4}\dfrac{l}{p+2}\left(\dfrac{d}{\rho}+1\right)^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{l}}\dfrac{p+2+\frac{\beta}{n}}{2l} \end{cases} \tag{23}$$

ε_1 和 ε_2 为大于零的任意常数,在式(22)中选择 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2k_2}$,然后代入式(19), 并令 $\varepsilon_2=\dfrac{\sigma-1}{2k_4a_2n^{p+2}c_2}$,有

$$\phi'(t) \leqslant a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 2a_2\sigma k_1[\phi(t)]^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{2\sigma}{n}}} + 2a_2\sigma k_3[\phi(t)]^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\sigma-\beta}} - \sigma(\sigma-1)\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \tag{24}$$

用不等式(25)处理式(24)中的 $\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$,

$$\lambda_0\int_\Omega \omega^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla\omega|^2\mathrm{d}x \tag{25}$$

其中 λ_0 是问题(26)的第一特征值.

$$\Delta\omega+\lambda\omega=0, \omega>0, x\in\Omega, \omega=0, x\in\partial\Omega \tag{26}$$

$$\int_\Omega u^{m+\sigma-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x = \frac{4}{(m+\sigma)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{m+\sigma}{2}}|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{(m+\sigma)^2}\lambda_0\int_\Omega u^{m+\sigma}\mathrm{d}x \geqslant \frac{4\lambda_0}{(m+\sigma)^2}\left[\int_\Omega u^\sigma\mathrm{d}x\right]^{\frac{m+\sigma}{\sigma}}|\Omega|^{-\frac{m}{\sigma}} = \frac{4\lambda_0}{(m+\sigma)^2}[\phi(t)]^{\frac{m+\sigma}{\sigma}}|\Omega|^{-\frac{m}{\sigma}} \tag{27}$$

把式(27)代入式(24),得到

$$\phi'(t) \leqslant a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 2a_2\sigma k_1[\phi(t)]^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{2\sigma}{n}}} +$$

$$2a_2\sigma k_3[\phi(t)]^{\frac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\sigma-\beta}}-\sigma(\sigma-1)\frac{4\lambda_0}{(m+\sigma)^2}|\Omega|^{-\frac{m}{\sigma}}[\phi(t)]^{\frac{m+\sigma}{\sigma}} \tag{28}$$

即
$$\phi'(t)\leqslant A_1[\phi(t)]^{\zeta_1}+A_2[\phi(t)]^{\zeta_2}+A_3[\phi(t)]^{\zeta}_3+A_4[\phi(t)]^{\zeta_4} \tag{29}$$

其中

$$\begin{cases}A_1=a_1\sigma|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}},A_2=2a_2\sigma k_1,A_3=2a_2\sigma k_3,A_4=-\sigma(\sigma-1)\dfrac{4\lambda_0}{(m+\sigma)^2}|\Omega|^{-\frac{m}{\sigma}}\\ \zeta_1=\dfrac{\sigma-1}{\sigma},\zeta_2=\dfrac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\frac{2\sigma}{n}},\zeta_3=\dfrac{p+2+\frac{\beta}{n}}{\sigma-\beta},\zeta_4=\dfrac{m+\sigma}{\sigma}\end{cases} \tag{30}$$

若 $u(x,t)$ 在有限时间 T 发生爆破,对式(29)两边积分可得

$$T\geqslant\int_{\phi(0)}^{\infty}\frac{d\eta}{A_1\eta^{\zeta_1}+A_2\eta^{\zeta_2}+A_3\eta^{\zeta_3}+A_4\eta^{\zeta_4}} \tag{31}$$

其中

$$\phi(0)=\int_\Omega[g(x)]^{(n-1)(p+2)+2}\mathrm{d}x \tag{32}$$

定理 1 证毕,下面给出定理 2 的证明.

定理 2 的证明

证明　设 $\Phi(t)=\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$, 对 $\Phi(t)$ 两边求导有

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&=2\int_\Omega u[\nabla((|\nabla u|^p+u^m)\nabla u)+f(u)]\mathrm{d}x\leqslant\\&-2\int_\Omega|\nabla u|^{p+2}\mathrm{d}x-2\int_\Omega u^m|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega u(a_1+a_2u^q)\mathrm{d}x=\\&[2a_1\int_\Omega u\mathrm{d}x-2\int_\Omega u^m|\nabla u|^2\mathrm{d}x]+[2a_2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\nabla u|^{p+2}\mathrm{d}x]=\\&H_1+H_2\end{aligned} \tag{33}$$

类似于前面的讨论,

$$\begin{aligned}H_1&\leqslant 2a_1[(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}]-\frac{8}{(2+m)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{m+2}{2}}|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&2a_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}[\Phi(t)]^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{(2+m)^2}\lambda_0\int_\Omega u^{m+2}\mathrm{d}x\leqslant\\&2a_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}[\Phi(t)]^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{(2+m)^2}\lambda_0[(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x)^{\frac{m+2}{2}}|\Omega|^{-\frac{m}{2}}]=\\&[\Phi(t)]^{\frac{1}{2}}[2a_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{(2+m)^2}\lambda_0|\Omega|^{-\frac{m}{2}}\Phi(t)]\end{aligned} \tag{34}$$

$$H_2=2a_2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\nabla u|^{p+2}\mathrm{d}x\leqslant 2a_2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x-2\lambda_0\int_\Omega u^{p+2}\mathrm{d}x \tag{35}$$

因 $p+1>q$, 所以

$$\int_\Omega u^{p+2}\mathrm{d}x\geqslant(\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x)^{\frac{p+2}{q+1}}|\Omega|^{\frac{q-p-1}{q+1}}$$

$$\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x\geqslant(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x)^{\frac{q+1}{2}}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}=[\Phi(t)]^{\frac{q+1}{2}}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}$$

所以

$$H_2\leqslant 2a_2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x-2\lambda_0|\Omega|^{\frac{q-p-1}{q+1}}(\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x)^{\frac{p+2}{q+1}}=$$

$$2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x(a_2-\lambda_0|\Omega|^{\frac{q-p-1}{q+1}}(\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x)^{\frac{p+1-q}{q+1}})\leqslant$$
$$2\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x(a_2-\lambda_0|\Omega|^{\frac{q-p-1}{q+1}}|\Omega|^{\frac{(1-q)(p+1-q)}{2(q+1)}}[\Phi(t)]^{\frac{p+1-q}{2}}) \tag{36}$$

容易看出,如果 $u(x,t)$ 在有限时间爆破,由式(34)和式(36)可以得出 $\Phi'(t)\leqslant 0$,这是矛盾的.

定理2证毕.

参考文献:

[1] FRIEDMAN A, MCLEOD B. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations[J]. Indiana Univ Math,1985(34):425-447

[2] CAFFARRELLI A, FRIEDMAN A. Blow-up of solutions of nonlinear heat equations[J]. Math Anal Appl,1988(129):409-419

[3] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Dirichlet conditions[J]. Math Anal Appl,2007(328):1196-1205

[4] GALAKTIONOV V A, VAZQUEZ J L. The problem of blow up in nonlinear parabolic equations[J]. Discrete Contin Dyn Syst,2002(8):399-433

[5] BALL J M. Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations [J]. Quart Math Oxford,1977(28):473-486

[6] FRIEDMAN A. Remarks on the maximum principle for parabolic equations and its applications[J]. Pacific Math,1958(8):201-211

[7] BANDLE C, BRUNNER H. Blow-up in diffusion equations[J]. Comput Appl Math,1998(97):3-22

[8] PAYNE L E, PHILIPPIN G A, SCHAEFER P W. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems[J]. Nonlinear Anal,2008(69):3495-3502

[9] PAYNE L E, PHILIPPIN G A, SCHAEFER P W. Bounds for blow-up time in nonlinear parabolic problems[J]. Math Anal Appl,2008(338):438-447

[10] LI Y F, LIU Y, LIN C H. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems under mixed boundary conditions[J]. Nonlinear Anal RWA,2010(11):3815-3823

[11] LI Y F, LIU Y, XIAO S Z. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems under Robin boundary conditions[J]. Math Comp Mode,2011(54):3065-3069

[12] 袁幼成,周宗福,周辉.一类分数阶微分方程共振边值问题解的存在性[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012(3):1-6

Blow-up Time Estimation for the Solutions of a Class of Nonlinear Parabolic Equations

WANG Qin-feng, ZHOU Shou-ming

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper mainly studied the blow-up phenomena of the solutions to some nonlinear parabolic equations under Robin boundary conditions, set up a series of differential inequalities, determined lower boundary estimation for blow-up time and finally gave the non-blow-up condition for the solutions.

Key words: blow-up; blow-up time estimation; nonlinear parabolic equations

责任编辑:李翠薇