文章编号:1672 -058X(2013)03 -0001 -04

非自治常微分方程组周期解的存在性*

张 申 贵

(西北民族大学 数学与计算机科学学院,甘肃 兰州 730030)

摘 要:研究非自治常微分方程组周期解的存在性. 当具有线性增长非线性项时, 利用临界点理论中的极小作用原理得到了周期解存在性的充分条件, 所得结果推广了已有结果.

关键词:常微分方程组;周期解;临界点理论

中图分类号:O175.25 **文献标志码**:A

考虑非自治常微分方程组

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + m^2 u(t) = \nabla F(t,u(t)) \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $T>0$, $F:[0,T]\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 满足:对 $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $F(t,x)$ 可测,对 a · e · $t\in[0,T]$, $F(t,x)$ 连续可微;且存在 $a\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$, $b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$,使得

$$|F(t,x)| \leqslant a(|x|)b(t);\ |\nabla F(t,x)| \leqslant a(|x|)b(t)$$

许多数学模型都可以归结为非自治常微分方程组. 近年来, 非自治常微分方程组周期解的存在性成为了人们研究的重要课题[1-6].

当 $m=0$ 时,文献[1]得到了下面定理:

定理 1 设存在, $f(t), g(t) \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$, $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{12}{T}$,使得

$$|\nabla F(t,x)| \leqslant f(t)|x| + g(t)$$

对所有 $x\in\mathbf{R}^N$ 和 a · e · $t\in[0,T]$成立,且 F 满足 Ahmad-Lazer-Paul 型强制性条件

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^2}\int_0^T F(t,x)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

则问题 $\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t,u(t)) \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \end{cases}$ 在 Sobolev 空间 H_T^1 中至少有一个周期解.

当 m 不恒等于 0 时,文献[2]得到了下面定理:

定理 2 设存在 $f(t), g(t)\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$, $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{12-4m^2T^2}{T}$,使得

$$|\nabla F(t,x)| \leqslant f(t)|x| + g(t) \tag{2}$$

对所有 $x\in\mathbf{R}^N$ 和 a · e · $t\in[0,T]$成立,且 F 满足 Ahmad-Lazer-Paul 型强制性条件

收稿日期:2012 -09 -28;**修回日期**:2012 -10 -30.

* **基金项目**:国家自然科学基金项目(71261022);西北民族大学中青年科研项目(12XB38).

作者简介:张申贵(1980-),男,甘肃兰州人,讲师,硕士研究生,从事非线性泛函分析研究.

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^2}\int_0^T F(t,x)\,\mathrm{d}t=+\infty$$

则问题(1)在 Sobolev 空间 H_T^1 中至少有一个周期解.

定理3 设 F 满足式(2)且

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^2}\int_0^T F(t,x)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\frac{T}{6}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}+\frac{m^2T}{2} \tag{3}$$

则问题(1)在 Sobolev 空间 H_T^1 中至少有一个周期解.

注:式(2)表明非线性项 $\nabla F(t,u(t))$ 是线性增长的.

定理1和2中要求式(3)中极限值为 $+\infty$,即 Ahmad-Lazer-Paul 型强制性条件成立. 易见式(3)中极限值可以是下方有界的,极限值的范围从 $+\infty$ 放宽为

$$\left[\frac{\frac{T}{6}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}+\frac{m^2T}{2},\ +\infty\right]$$

定理1对应于定理3中 $m=0$, 且式(3)中极限值为 $+\infty$ 的特殊情形.

定理2对应于定理3中式(3)中极限值为 $+\infty$ 的特殊情形.

记 $H_T^1=\{u:[0,T]\to\mathbf{R}^N$ 在 $[0,T]$ 上绝对连续, $u(0)=u(T)$, $\dot{u}\in L^2(0,T;R^N)\}$ 是一个自反的 Banach 空间,具有范数为

$$\|u\|=\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

在 Sobolev 空间 H_T^1 上定义泛函 ϕ 如下:

$$\phi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-\frac{1}{2}m^2\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,u(t))\,\mathrm{d}t$$

则 ϕ 弱下半连续且连续可微,$u\in H_T^1$ 是问题(1)的周期解当且仅当 u 是泛函 ϕ 的临界点.

引理1[3] (极小作用原理)若泛函 $\phi:X\to\mathbf{R}$ 弱下半连续,且 ϕ 在自反 Banach 空间 X 中强制,即当 $\|u\|\to\infty$ 时,有 $\phi(u)\to+\infty$,则泛函 ϕ 在空间 X 中有极小值.

对任意的 $u\in H_T^1$, 设 $\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$, $\tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$, 记 $\|u\|_{L^2}=\left(\int_0^T|u(t)|\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|u(t)|$.

由 Sobolev 不等式,有

$$\|\tilde{u}\|_\infty^2\leqslant\frac{T}{12}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{T}{12}\|\dot{u}\|_{L^2}^2 \tag{4}$$

定理3的证明

由式(2)和式(4)、均值不等式,有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T F(t,u_n)\,\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar{u}_n)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\int_0^T\int_0^1|\nabla F(t,\bar{u}_n+s\tilde{u}_n(t))||\tilde{u}_n(t)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^T\int_0^1 f(t)|\bar{u}_n+s\tilde{u}_n(t)||\tilde{u}_n(t)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^1 g(t)|\tilde{u}_n(t)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\\&\left(|\bar{u}|+\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_\infty\right)\|\tilde{u}\|_\infty\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+\|\tilde{u}\|_\infty\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,\|\tilde{u}\|_\infty^2+\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\,\|\tilde{u}\|_\infty+\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,|\bar{u}|\,\|\tilde{u}\|_\infty\leqslant$$

$$\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}^2+\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,|\bar{u}|\,\|\dot{u}\|_{L^2}+\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}\tag{5}$$

由式(3),对 $\forall\varepsilon>0$,当 $|\bar{u}|$ 充分大时,有

$$\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t\geqslant\left(\frac{\frac{T}{6}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}+\frac{m^2T}{2}-\varepsilon\right)|\bar{u}|^2\tag{6}$$

由式(5)(6),有

$$\phi(u)=\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}m^2\int_0^T|u|^2\mathrm{d}t+\int_0^T F(t,u(t))\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}|\dot{u}|_{L^2}{}^2-\frac{1}{2}m^2\int_0^T|u+\tilde{u}|^2\mathrm{d}t+\left[\int_0^T F(t,u)\,\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t\right]+\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{1}{2}|\dot{u}|_{L^2}{}^2-\frac{1}{2}m^2T(|\bar{u}|^2+\|\tilde{u}\|_\infty^2)+\left[\int_0^T F(t,u)\,\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t\right]+\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_{L^2}{}^2-\frac{1}{2}m^2T\frac{T}{12}\|\dot{u}\|_{L^2}{}^2-\frac{1}{2}m^2T|\bar{u}|^2+\left(\frac{\frac{T}{6}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}+\frac{m^2T}{2}-\varepsilon\right)|\bar{u}|^2-$$

$$\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}{}^2-\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,|\bar{u}|\,\|\dot{u}\|_{L^2}-\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{m^2T^2}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)\|\dot{u}\|_{L^2}{}^2-\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,|\bar{u}|\,\|\dot{u}\|_{L^2}-\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}+$$

$$\left(\frac{\frac{T}{6}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}-\varepsilon\right)|\vec{u}|^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{12-m^2T^2}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left[\|\dot{u}\|_{L^2}-\frac{2\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,|\bar{u}|}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}\right]^2+$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{12-m^2T^2}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)\|\dot{u}\|_{L^2}{}^2-\sqrt{\frac{T}{12}}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\,\|\dot{u}\|_{L^2}+$$

$$\left(\frac{\frac{T}{12}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{12-m^2T}{24}-\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}-\varepsilon\right)|\bar{u}|^2$$

注意到 $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t<\frac{12-4m^2T^2}{T}$,可得 $\frac{T}{24}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t<\frac{12-4m^2T^2}{24}$.

因为 $\|u\|\to\infty\Rightarrow(|\bar{u}|^2+\|\dot{u}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty$,所以当 $\|u\|\to\infty$ 时,有 $\phi(u)\to+\infty$. 即泛函 ϕ 在 W 中是强制的. 注意到泛函 ϕ 弱下半连续, H_T^1 为自反的 Banach 空间,由引理 1(极小作用原理)知泛函 ϕ 在 Banach 空间 H_T^1 中至少有一个临界点,从而问题(1)在 Banach 空间 W 中至少有一个周期解.

参考文献:

[1] ZHAO F K, WU X. Existence of periodic solutions for nonautonmous second order systems with linear nonlinearity[J]. Nonlinear Anal, 2005, 60(7):325-335

[2] 王少敏,冷天玖. 关于常微分方程组周期解的存在性定理[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007(2):119-121

[3] MAWHIN J, WILLEM M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. NewYork:Springer-Verlag,1989

[4] 韩志清.共振条件下的常微分方程组 2π-周期解的存在性[J].数学学报,2000(4):639-644

[5] 王少敏.带有阻尼项的二阶哈密顿系统的周期解[J].重庆工商大学学报:自然科学版, 2011(4):6-11

[6] HAN Z Q. Existence of periodic solutions of linear Hamiltonian systems with sublinear perturb-ation[J]. Boundary Value Probiems, 2010(12):123-131

The Existence of Periodic Solutions for Non-autonomous Ordinary Differential Equation Systems

ZHANG Shen-gui

(College of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities, Gansu Lanzhou 730030, China)

Abstract: In this paper, we investigate the existence of periodic solutions for non-autonomous ordinary differential equation systems. With nonlinear item of linear increment, some sufficient conditions for the existence of periodic solutions are obtained by using the least action theorem in critical point theory, and the obtained results expand the existed outcome.

Key words: ordinary differential equation systems; periodic solutions; critical point theory

责任编辑:李翠薇