文章编号:1672-058X(2013)02-0015-03

集值拟变分不等式间隙函数的一个注记*

胡 玉 萍
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:拟变分不等式作为变分不等式的推广,利用集值变分不等式的一类间隙函数提出了集值拟变分不等式的间隙函数;同时,建立了集值拟变分不等式的间隙函数并证明了它的一些性质.

关键词:拟变分不等式;间隙函数;集值映射

中图分类号:O231.9 **文献标志码**:A

近年来,许多学者致力于变分不等式的研究. 2011 年,D. Aussel. J. Dutta 提出了集值变分不等式和弱集值变分不等式的概念,并证明了有限性和误差界的性质. 同年,RachanaGupta 和 AparanaMehra 用正则化间隙函数和 D-间隙函数得到了拟变分不等式的局部和全局误差界. 在文献[1-3]的基础上定义了集值拟变分不等式和弱集值变分不等式的概念,并建立了它的间隙函数.

1 预备知识

定义 1[1] 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个函数,C 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个凸子集. 变分不等式(VI(F,C))是找到 $\bar{x}\in C$,使得 $[F(\bar{x}),y-\bar{x}]\geqslant 0,\ \forall y\in C$.

定义 2[2] 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个函数,$C:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个集值映射,且对每一个 $x\in\mathbf{R}^n$,$C(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个闭凸集. 拟变分不等式(QVI(F,$C(x)$))是找到 $\bar{x}\in C(\bar{x})$,使得 $[F(\bar{x}),y-\bar{x}]\geqslant 0,\ \forall y\in C(\bar{x})$.

定义 3[3] 设 $T:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个集值映射,C 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空凸子集. 集值变分不等式的解集($S(T,C)$),即:

$$\bar{x}\in S(T,C)\Leftrightarrow\exists\ \bar{x}^*\in T(\bar{x})\quad \text{s.t}\quad [\bar{x}^*,y-\bar{x}]\geqslant 0,\ \forall y\in C$$

定义 4[3] 设 $T:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个集值映射,C 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空凸子集. 弱集值变分不等式的解集($S_\omega(T,C)$),即:

$$\bar{x}\in S_\omega(T,C)\Leftrightarrow\forall y\in C,\ \exists\ \bar{x}_y^*\in T(\bar{x})\quad \text{s.t}\quad [\bar{x}_y^*,y-\bar{x}]\geqslant 0$$

2 集值拟变分不等式

定义 5 设 $T:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个集值映射,C 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空凸子集. 集值拟变分不等式的解集($S(T,C(x))$),即:

收稿日期:2012-07-04;**修回日期**:2012-10-08.

* **基金项目**:重庆市自然科学基金(CSTC2009BB8240).

作者简介:胡玉萍(1987-),女,重庆沙坪坝人,硕士研究生,从事拟变分不等式的研究.

$$\bar{x} \in S(T,C(x)) \Leftrightarrow \exists\ \bar{x}^* \in T(\bar{x}) \quad \text{s.t} \quad [\bar{x}^*, y-\bar{x}] \geqslant 0, \forall y \in C(\bar{x})$$

定义 6 设 $T:\mathbf{R}^n \to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个集值映射，C 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空凸子集. 弱集值拟变分不等式的解集 $(S_\omega(T,C(x)))$，即：

$$\bar{x} \in S_\omega(T,C(x)) \Leftrightarrow \forall y \in C(\bar{x}), \exists\ \bar{x}_y^* \in T(\bar{x}) \quad \text{s.t} \quad [\bar{x}_y^*, y-\bar{x}] \geqslant 0$$

注 1 $S(T,C(x)) \subset S_\omega(T,C(x))$.

构造函数如下：

$$g_\alpha(x) := \sup_{y \in C(x)} \inf_{x^* \in T_\alpha(x)} [x^*, x-y] \quad \forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n$$

其中 $T_\alpha(x) = \begin{cases} \{0\}, 0 \in T(x) \\ \left\{\dfrac{1}{\alpha N(x^*)}x^* : x^* \in T(x)\right\}, \text{否则} \end{cases}$.

定理 1 假设集值映射 T 是方向闭的，那么对任意的 $\alpha>0$，函数 g_α 是集值弱拟变分不等式 $\mathrm{QVI}_\omega(T,C)$ 的一个间隙函数. 而且，如果对每一个 x，$C(x)$ 是闭凸集，T 是凸值映射，则 g_α 是集值拟变分不等式 $\mathrm{QVI}(T,C)$ 的一个间隙函数.

证明 函数 g_α 显然是非负的.

如果 $g_\alpha(x)=0$，则对任意的 $y \in C(x)$，有 $0 \geqslant \inf\limits_{x^* \in T_\alpha(x)} [x^*, x-y]$. 又因为 T 是方向闭的，则 T_α 是方向闭的，从而对每一个 $y \in C(x)$，存在 $x_y^* \in T_\alpha(x)$，使得 $[x_y^*, y-x] \geqslant 0$. 由定义 2 可知，x 是 $\mathrm{QVI}_\omega(T,C)$ 的一个解. 如果 x 是 $\mathrm{QVI}_\omega(T,C)$ 的一个解，由定义 2 立即可得 $g_\alpha(x)=0$. 故 g_α 是集值弱拟变分不等式 $\mathrm{QVI}_\omega(T,C)$ 的一个间隙函数.

由 Sion's 最小最大定理可得定理的后半部分的证明.

间隙函数 g_α 的正则化间隙函数如下：

$$g_{(\alpha,\beta)}(x) := \sup_{y \in C(x)} [\inf_{x^* \in T_\alpha(x)} [x^*, x-y] - \frac{1}{2\beta}x-y^2], \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$$

定理 2 设对任意的 $x>0$，$C(x)$ 是一个闭凸集，$T:\mathbf{R}^n \to 2^{\mathbf{R}^n}$ 是一个有非空值的方向闭集值映射，则对任意的 $\alpha>0,\beta>0$，对任意的 $x \in C(x)$，$g_{(\alpha,\beta)}(x) \geqslant 0$. 而且 $g_{(\alpha,\beta)}(\bar{x})=0$ 当且仅当 $\bar{x} \in S_\omega(T,C(x))$.

证明 由 $g_{(\alpha,\beta)}(x)$ 的定义，显然有对任意的 $x \in C(x)$，$g_{(\alpha,\beta)}(x) \geqslant 0$.

假设 $g_{(\alpha,\beta)}(\bar{x})=0$，任意取一个固定的点 $x_0 \in C(x)$，考虑如下子列：

$$y_k = \bar{x} + \frac{1}{k}(x_0 - \bar{x}), k \in N$$

因为对任意的 $x>0$，$C(x)$ 是一个闭凸集，所以 $y_k \in C(x)$，$\forall k \in N$.

令 $\psi_\alpha(\bar{x}, y_k) = \inf\limits_{x^* \in T_\alpha(x)} [x^*, x-y]$，则由 $g_{(\alpha,\beta)}(\bar{x})=0$ 可得：

$$\psi_\alpha(\bar{x}, y_k) \leqslant \frac{1}{2\beta}\bar{x} - y_k{}^2$$

而 $\psi_\alpha(\bar{x}, y_k) = \dfrac{1}{k} \inf\limits_{x^* \in T_\alpha(\bar{x})} [x^*, \bar{x}-x_0]$，所以 $\inf\limits_{x^* \in T_\alpha(\bar{x})} [x^*, \bar{x}-x_0] \leqslant \dfrac{1}{2k\beta}\bar{x}-x_0{}^2$. 当 $k \to \infty$ 时，有 $\inf\limits_{x^* \in T_\alpha(\bar{x})} [x^*, \bar{x}-x_0] \leqslant 0$.

又因为 T 是方向闭集值映射，所以对任意的 $\alpha>0$，T_α 是一个紧集. 即 $\exists x_0^* \in T_\alpha(\bar{x})$，使得 $[x_0^*, x_0-\bar{x}] \geqslant 0$. 因为 $x_0 \in C(x)$ 是任意的，所以 $\bar{x} \in S_\omega(T,C(x))$.

另一方面，假设 $\bar{x} \in S_\omega(T,C(x))$，即使对每一个 $y \in C(x)$，存在 $x_y^* \in T_\alpha(\bar{x})$，使得 $[x_y^*, y-\bar{x}] \geqslant 0$. 于是，$\psi_\alpha(\bar{x}, y) \leqslant 0$，$\forall y \in C(x)$，从而 $g_{(\alpha,\beta)}(\bar{x}) \leqslant 0$，故 $g_{(\alpha,\beta)}(\bar{x})=0$.

参考文献:

[1] PATRICE M,DAO L ZH. Weak sharp solutions of variational inequalities[J]. SIAM J Optim,1998(9):179-189

[2] RACHANA G,APARANA M. Gap functions and error bounds for Quasi variational inequalities[M]. J Glob Optim,published on line,2011

[3] AUSSEL D, DUTTA J. On gap functions for multivalued stampacchia variational inequalities[J]. J optim Theory Appl,2011,149:513-527.

[4] FACCHINEI F, PANG J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems[M]. New York:Springer-Verlag,2003

[5] SION M. On general minimax theorems[J]. Pac J Math,1958(8):171-176

A Note of Gap Function for Set-valued Quasi Variational Inequality

HU Yu-ping

(School of Mathematics,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China)

Abstract:In this paper, we introduced a new class of gap function for quasi-variational inequality, which generalizes the gap function for variational inequality. At the same time,this paper establishes gap function for the set-valued quasi-variational inequality and proves its some properties.

Key words: quasi variational inequality;gap function;set-valued mapping

责任编辑:田　静
校　　对:李翠薇

(上接第 14 页)

Linear Coloring of Planar Graphs

JU Ping

(School of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)

Abstract:A proper coloring of graph G meets the set of the vertices of any two colors to induce sub-graph which is the number of disjoint paths and this proper coloring is referred to linear coloring. The number of linear coloring of the graph G indicates the number of minimum colors in all linear coloring of the graph G. This paper studies the linear coloring of planar graphs and proves $\mathrm{lc}(G) \leqslant \Delta(G) + 14$ for the planar graphs with maximum degree Δ being even number.

Key words:planar graph; linear coloring; linear chromatic number; maximum degree

责任编辑:李翠薇