文章编号:1672－058X(2013)02－0012－03

平面图的线性着色*

鞠 平
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:图 G 的一个正常着色满足着任意两种颜色的顶点集合导出的子图是一些点不交的路的并,则称这个正常着色为图的线性着色. 图 G 的线性色数是指 G 的所有线性着色中所用的最少颜色的个数. 研究了平面图的线性着色,对于最大度 Δ 为偶数的平面图 G,证明了 $\mathrm{lc}(G)\leqslant\Delta(G)+14$.

关键词:平面图;线性着色;线性色数;最大度

中图分类号:O157 **文献标志码**:A

图 G 的线性着色是正常的顶点着色,使得由着任意两类颜色的顶点导出的子图是一些顶点不相交的路的并,即是由路组成的森林. 图 G 的线性色数是指图 G 所有线性着色中所用的最少颜色数,记为 $\mathrm{lc}(G)$. 图 G 的正常顶点着色称为 k-不足着色,如果满足每种颜色在任意一个顶点的邻集中至多出现 $k-1$ 次. 图 G 的正常顶点着色中如果不含双色圈,则称该着色为无圈着色. 显然,图 G 的线性着色既要满足无圈着色又要满足 3－不足着色.

此处研究的图均为简单图,且最大度为偶数,未介绍的术语和记号请见文献[1]. 有关图的线性着色的其他结果请见文献[2-8].

引理 1 如果 G 是平面图且 $\Delta(G)\leqslant5$,则 $\mathrm{lc}(G)\leqslant14$.

引理 2 每一个 $\delta(G)=5$ 的平面图 G 都包含一个 4－圈 $vxuyv$,其中 uv 是该 4－圈的一条弦,满足 $d(v)=5$ 且 $d(u)\leqslant6$.

引理 3 每一个 $\delta(G)\geqslant3$ 的平面图 G,包含一个顶点 v 有 k 个邻点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$,且 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\cdots\leqslant d(v_k)$ 使得 G 满足情况①②或③.

① $k=3$ 且 $d(v_1)\leqslant11$.

② $k=4$ 且 $d(v_1)\leqslant7$,$d(v_2)\leqslant11$.

③ $k=5$ 且 $d(v_1)\leqslant6$,$d(v_2)\leqslant7$,$d(v_3)\leqslant11$.

定理 1 若 G 是平面图且 $\Delta(G)$ 为偶数,则 $\mathrm{lc}(G)\leqslant\Delta(G)+14$.

证明 对图 G 的顶点数用归纳法来证明定理 1. 当 $|V(G)|\leqslant14$ 时,结果显然成立,所以假设 $|V(G)|\geqslant15$. 当 $\Delta(G)\leqslant5$ 时,由引理 1 知定理成立. 下面假设 $\Delta(G)\geqslant6$. 设 $C=\{1,2,\cdots,\Delta(G)+14\}$ 表示 $\Delta(G)+14$ 种颜色,$k=\Delta(G)+14$,并且对任何满足 $|V(H)|<|V(G)|$ 和 $\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$ 的平面图 H,定理 1 都成立.

若图 G 含有 1－顶点 v,则由归纳假设,图 $G-v$ 可用 C 中 k 种颜色进行线性着色,而给顶点 v 着色时,v

收稿日期:2012－07－10;**修回日期**:2012－10－09.

* **基金项目**:中央高校基本科研业务费资助(DJXS11100042).

作者简介:鞠平(1985-),男,山东烟台人,硕士研究生,从事图论及其应用研究.

只需回避与它相邻的顶点的颜色以及颜色集 $C_2(u)$ 中的颜色，故 v 共需回避至多$\left[\frac{\Delta(G)}{2}\right]$种颜色. 显然可以从 C 中选取颜色来给顶点 v 着色，从而将图 $G-v$ 的线性 k 着色延拓到整个图 G，即图 G 是线性 k 可着色的.

若图 G 中含有 2 – 顶点，设 x,y 是与顶点 v 相邻的两个顶点，令 $H=G-v$，则由归纳假设，图 H 可用 C 中 k 种颜色进行线性着色. 而给顶点 v 着色时，v 只需要回避与它相邻的顶点的颜色以及颜色集 $C_{\geqslant 2}(N_H(x)\cup N_H(y))$ 中的颜色，故顶点 v 共需回避的颜色数至多为 $2+\left[\frac{d(x)-1+d(y)-1}{2}\right]\leqslant\Delta(G)+1<\Delta(G)+14$，所以可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G，即图 G 是线性 k 可着色的.

下面假设 $\delta(G)\geqslant 3$，证明分成两种情况进行.

1）当 $6\leqslant\Delta(G)\leqslant 8$ 时：

若图 G 包含 3 – 顶点 v，设 x,y,z 是 v 的邻点，$H=G-v\oplus xy$. 显然图 H 满足 $\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$ 且 $|V(H)|<|V(G)|$. 由归纳假设，图 H 是线性 k 可着色的，该线性着色记为 c. 在 c 中，显然有 $c(x)\neq c(y)$，所以图 G 中顶点 v 的 3 – 不足性是满足的. 而给顶点 v 着色时，v 只需回避与它相邻的顶点的颜色以及颜色集 $C_{\geqslant 2}((N_G(x)\cup N_G(y)\cup N_G(z))\setminus\{v\})$ 中的颜色，故顶点 v 共需回避的颜色数至多为 $3+\left[\frac{d(x)-1+d(y)-1+d(z)-1}{2}\right]\leqslant 3+\Delta(G)-1+\left[\frac{\Delta(G)-1}{2}\right]\leqslant\Delta(G)+2+\left[\frac{8-1}{2}\right]\leqslant\Delta(G)+5<\Delta(G)+14$. 所以可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G，即图 G 是线性 k 可着色的.

若 G 包含 4 – 顶点 v，设 x,y,z,u 是 v 的邻点，设 $H=G-v\oplus\{xy,zu\}$. 由归纳假设，图 H 是线性 k 可着色的. 而给顶点 v 着色时，v 首先要回避与它相邻的 4 个顶点的颜色，此外为保证与顶点 v 相邻顶点的 3 – 不足性，以及避免双色圈的产生，故顶点 v 共需回避的颜色数至多为 $4+\left[\frac{d(x)-1+d(y)-1+d(z)-1+d(u)-1}{2}\right]\leqslant 4+2\Delta(G)-2\leqslant\Delta(G)+10<\Delta(G)+14$. 所以可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G，即图 G 是线性 k 可着色的.

下面假设 $\delta(G)=5$. 由引理 2 知，G 包含一个 4 – 圈 $vxuyv$，其中 uv 是该 4 – 圈的一条弦，满足 $d(v)=5$ 且 $d(u)\leqslant 6$. 设 s 和 t 是与顶点 v 相邻且不同于 x,y,u 的顶点. 设 $H=G-v\oplus\{xy,st\}$，由归纳假设，图 H 是线性 k 可着色的，该线性着色记为 c. 在 c 中，显然顶点 x,y,u 互不同色且顶点 s 与 t 也不同色. 给 v 着色回避的颜色数至多为 $|\{c(x),c(y),c(u),c(s),c(t)\}\cup C_{\geqslant 2}((N_G(x)\cup N_G(y)\cup N_G(u)\cup N_G(s)\cup N_G(t))\setminus\{v\})|\leqslant 5+\left[\frac{d(x)-1+d(y)-1+d(u)-1+d(s)-1+d(t)-1}{2}\right]\leqslant 5+2\Delta(G)-2+\left[\frac{d(u)-1}{2}\right]\leqslant 2\Delta(G)+3+\left[\frac{6-1}{2}\right]\leqslant\Delta(G)+13<\Delta(G)+14$. 所以可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G，即图 G 是线性 k 可着色的.

2）当 $\Delta(G)\geqslant 9$ 时：

由引理 3，G 包含一个顶点 v 有 k 个邻点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$，且 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\cdots\leqslant d(v_k)$ 使得 G 满足①②或③.

若①成立，设 $H=G-v\oplus v_2v_3$，显然 H 是线性 k 可着色的. 给 v 着色 a，则 $a\in C\setminus(\{c(v_1),c(v_2),c(v_3)\}\cup C_{\geqslant 2}((N_G(v_1)\cup N_G(v_2)\cup N_G(v_3))\setminus\{v\}))$，因为 $|\{c(v_1),c(v_2),c(v_3)\}\cup C_{\geqslant 2}((N_G(v_1)\cup N_G(v_2)\cup N_G(v_3))\setminus\{v\})|\leqslant 3+\left[\frac{d(v_1)-1+d(v_2)-1+d(v_3)-1}{2}\right]\leqslant 3+\left[\frac{11-1+\Delta(G)-1+\Delta(G)-1}{2}\right]=\Delta(G)+7<\Delta(G)+14$. 所以存在剩余颜色给 v 着色，即可以将图 H 的线性着色延拓到整个图 G.

若②成立，设 $H=G-v\oplus\{v_1v_2,v_3v_4\}$，显然 H 是线性 k 可着色的. 给 v 着色 a，则 $a\in C\setminus(\{c(v_1),c(v_2),c(v_3),c(v_4)\}\cup C_{\geqslant 2}((N_G(v_1)\cup N_G(v_2)\cup N_G(v_3)\cup N_G(v_4))\setminus\{v\}))$，因为 $|\{c(v_1),c(v_2),c(v_3),c(v_4)\}\cup C_{\geqslant 2}((N_G(v_1)\cup N_G(v_2)\cup N_G(v_3)\cup N_G(v_4))\setminus\{v\})|\leqslant 4+\left[\frac{d(v_1)-1+d(v_2)-1+d(v_3)-1+d(v_4)-1}{2}\right]\leqslant$

$4+\left[\dfrac{7-1+11-1+\Delta(G)-1+\Delta(G)-1}{2}\right]=\Delta(G)+11<\Delta(G)+14$,所以存在剩余颜色给 v 着色,即可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G.

若③成立,设 H 为在 G 中收缩边 vv_1 成为一个新的顶点 v'. 易知 $d_H(v')=d(v)+d(v_1)-2\leqslant 5+6-2=9\leqslant\Delta(G)$. 因此图 H 满足 $\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$ 且 $|V(H)|<|V(G)|$. 所以由归纳假设,图 H 是线性 k 可着色的,该线性着色记为 c. 在该线性着色 c 中,显然 v' 与 v_2,v_3,v_4,v_5 不同色. 令 $S=\{c(v_2),c(v_3),c(v_4),c(v_5)\}$,这里 S 的元素可以重复出现. 用 $\Gamma(s)$ 表示 S 中的元素出现的最大重数,显然 $1\leqslant\Gamma(s)\leqslant 2$. 所以图 G 中顶点 v 的 3 - 不足性是满足的.

当 $\Gamma(s)=1$ 时,即在线性着色 c 中,与顶点 v 相邻的顶点互不同色,故不会出现过顶点 v 的双色圈. 当给顶点 v 着色时,v 只需回避与它相邻的顶点的颜色以及颜色集 $C_{\geqslant 2}(N_G(v_1)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_2)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_3)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_4)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_5)\setminus\{v\})$ 中的颜色,故顶点 v 共需回避的颜色数至多为 $5+\left[\dfrac{d(v_1)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_2)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_3)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_4)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_5)-1}{2}\right]\leqslant 5+\left[\dfrac{6-1}{2}\right]+\left[\dfrac{7-1}{2}\right]+\left[\dfrac{11-1}{2}\right]+\left[\dfrac{\Delta(G)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{\Delta(G)-1}{2}\right]\leqslant\Delta(G)+13<\Delta(G)+14$. 所以存在剩余颜色给 v 着色,即可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G.

当 $\Gamma(s)=2$ 时,不妨设 v_4 与 v_5 颜色相同,其余均可同理得证. 此时当给顶点 v 着色时,v 只需回避与它相邻的顶点的颜色以及颜色集 $C_{\geqslant 2}(N_G(v_1)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_2)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}(N_G(v_3)\setminus\{v\})$,$C_{\geqslant 2}((N_G(v_4)\cup N_G(v_5))\setminus\{v\})$ 中的颜色,又由于 $\Delta(G)$ 为偶数,故顶点 v 共需回避的颜色数至多为 $4+\left[\dfrac{d(v_1)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_2)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_3)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{d(v_4)-1+d(v_5)-1}{2}\right]\leqslant 4+\left[\dfrac{6-1}{2}\right]+\left[\dfrac{7-1}{2}\right]+\left[\dfrac{11-1}{2}\right]+\left[\dfrac{\Delta(G)-1+\Delta(G)-1}{2}\right]=\Delta(G)+13<\Delta(G)+14$. 所以存在剩余颜色给 v 着色,即可以将图 H 的线性 k 着色延拓到整个图 G.

综上所述,图 G 是线性 k 可着色的,定理得证.

参考文献:

[1] LI C,WANG W F,RASPAUD A. Upper bounds on the linear chromatic number of a graph[J]. Discrete Mathematics,2011,311:232-238

[2] BORODIN O V. Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring number[J]. Graph Theory,1993(23):233-239

[3] VAN DEN HEUVEL J,MCGUINNESS S. Coloring the square of a planar graph[J]. Graph Theory,2003(42):110-124

[4] ESPERET L,MONTASSIER M,RASPAUD A. Linear choosability of graphs[J]. Discrete Mathematics,2008,308:3938-3950

[5] WANG W F,LI C. Linear coloring of graphs embeddable in a surface of nonnegative char-acteristic[J]. Science in China Series A,2009,52(5):991-1003

[6] RASPAUD A,WANG W F. Linear coloring of planar graphs with large girth[J]. Discrete Mathematics,2009,309:5678-5686

[7] DONG W,XU B G,ZHANG X Y. Improved bounds on linear coloring on plane graphs[J]. Science China Mathematics,2010,53(7):1895-1902

[8] YUSTER R. Linear coloring of graphs[J]. Discrete Mathematics,1998,185:293-297

(下转第 17 页)