文章编号:1672 -058X(2013)02 -0008 -04

正四面体生成的一般 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度的估计*

孙善辉, 武以敏, 李壮壮
(宿州学院 数学与统计学院,安徽 宿州 234000)

摘　要:首先引入了正四面体生成的一般 Sierpinski 块的概念及其构造,给出正四面体生成的一般 Sierpinski 块的 Hausdorff 维数,并对其 Hausdorff 测度研究现状进行了分析;通过构造出一个新的迭代数列,得到了估计正四面体生成的一般 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度的更好的公式,并计算得出了相关结果.

关键词:Sierpinski 块;Hausdorff 维数;Hausdorff 测度
中图分类号:O174　　　　**文献标志码**:A

Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度是学习分形的两个重要的基本概念,计算或者估计分形的 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度的值是十分重要的问题[1]. 但是在大多数情况下,计算它们,特别是计算 Hausdorff 测度,是非常困难的. 此处首先引入了正四面体生成的一般 Sierpinski 块的概念及其构造,然后构造了一个新的数列,最后得到了 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度的一个更好的估计公式.

取 R^3 中的正四面体 $ABCD$ 并记之为 E_0,并在 E_0 4 个角上作 4 个边长为 $c(0<c\leqslant 0.5)$ 的小四面体,保留这 4 个小四面体并去掉内部其余的部分,记之为 E_1. 重复上述的做法,在 E_1 的基础上可以得到 E_2. 如图 1 所示,无穷多次重复上述步骤,得到 $E_0\Leftrightarrow E_1\Leftrightarrow E_2\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow E_n\Leftrightarrow\cdots$,从而称非空集合 $E=\bigcap_{i=0}^{\infty}E_i$ 为 Sierpinski 块. 易知,Sierpinski 块满足开集条件,从而其维数为 $s=\dim_H E=\log_{\frac{1}{c}}4$.

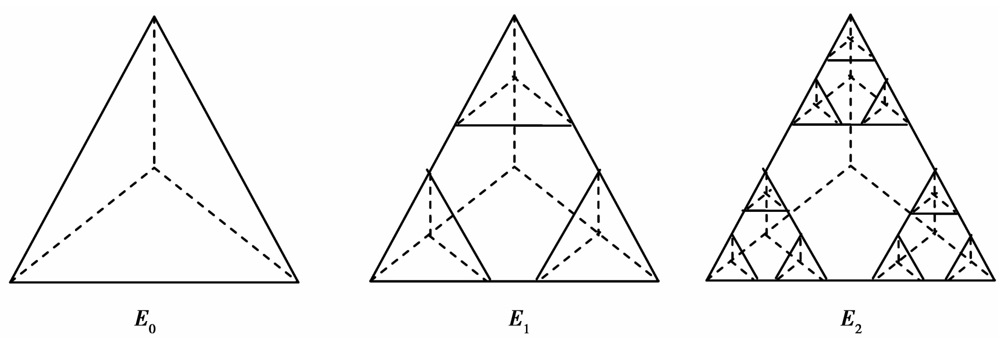

图 1　一般 Sierpinski 块的构造

为了证明定理,先给出两个引理.

引理 1[2]　令 E 是满足开集条件的自相似集,并且 $\dim_H(E)=s$. 则对任一可测集 $U\subset R^n$, $|U|>0$,有

收稿日期:2012 -07 -28;**修回日期**:2012 -09 -17.
* **基金项目**:安徽省高校优秀青年人才基金(2012SQRL202, 2012SQRL203);宿州学院自然科学项目(2012yyb04).
作者简介:孙善辉(1979-),男,安徽萧县人,讲师,硕士,从事分形理论及其应用研究.

$$H^s(E \cap U) \leqslant |U|^s$$

引理 2[3]　令 E 是由满足开集条件的 $m(m>1)$ 个分形的自相似集，其相似比 c_i 为

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = c = \text{con } st$$

如果可测集 $U \subset R^n$ 包括 N 个 $c^k - E$，其中 $1 \leqslant N \leqslant m^k, k \geqslant 1$，则

$$H^s(E) \leqslant \frac{m^k}{N} |U|^s \tag{1}$$

通过公式(1)，将能估计出此类 Sierpinski 垫片($s \in (1, \log_2 3)$)的 Hausdorff 测度的上限.

定理 1　构造数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$如下：

$$1, 4, 7, 16, 19, 28, 37, 64, \cdots$$

即通项公式满足：

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{2^m} = 4^m, \forall m \geqslant 1 \\ x_{2^m+i} = 4^m + 3x_i, \forall 1 \leqslant i < 2^m \end{cases} \tag{2}$$

则一般 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度的上限估计为：

$$H^s(S) \leqslant \frac{4^k}{4^k - 4x_{2j-1}} \cdot \left\{2\left(j \cdot c^{k-1} - c^k + \sum_{n=1}^{k-2}\left[\frac{j + 2^{n-2} - 1}{2^n}\right] \cdot (c^{k-n-1} - 2c^{k-n})\right. - 0.5)^2 + 0.5\right\}^{-\frac{\ln 2}{\ln c}}$$

$$s = \log_{\frac{1}{c}} 4, c \in (0, 0.5], k \in Z^+, j \in Z^+ \text{和 } k \geqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 2^{k-2} \tag{3}$$

证明　如图 1 所示，取 R^3 中的正四面体 $ABCD$ 并记之为 E_0，并在 E_0 4 个角上作 4 个边长为 $c(0<c \leqslant 0.5)$的小四面体，保留这四个小四面体并记之为 E_1. 重复上述的做法，在 E_1 的基础上可以得到 E_2. 无穷多次重复上述步骤，如图 2 所示，得到 $E_0 \Leftrightarrow E_1 \Leftrightarrow E_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow E_n \Leftrightarrow \cdots$，从而 $E = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$.

由引理 2 中的公式(1)，当 4^k 和 n 固定时，如果想要得到更好的上限估计，必须使选择的直径 $|U_j^k|$ 尽量小. 于是，记离 A、B、C 和 D 3 点较远的点依次为 $E_1^2, F_1^2, G_1^2, \cdots, N_1^2, O_1^2, P_1^2$. 因此，用同样的方法继续对剩下的部分进行分割并记号，如图 2 所示，依次得到：$E_1^3, F_1^3, G_1^3, \cdots, N_1^3, O_1^3, P_1^3$；$E_2^3, F_2^3, G_2^3, \cdots, N_2^3, O_2^3, P_2^3$；$E_1^4, F_1^4, G_1^4, \cdots, N_1^4, O_1^4, P_1^4$；$E_2^4, F_2^4, G_2^4, \cdots, N_2^4, O_2^4, P_2^4$；$E_3^4, F_3^4, G_3^4, \cdots, N_3^4, O_3^4, P_3^4$；$E_4^4, F_4^4, G_4^4, \cdots, N_4^4, O_4^4, P_4^4$；……；$E_1^{2k}, F_1^{2k}, G_1^{2k}, \cdots, N_1^{2k}, O_1^{2k}, P_1^{2k}$；……；$E_{2k-2}^{2k}, F_{2k-2}^{2k}, G_{2k-2}^{2k}, \cdots, N_{2k-2}^{2k}, O_{2k-2}^{2k}, P_{2k-2}^{2k}$.

令 U_j^k 代表八面体 $E_j^k F_j^k G_j^k H_j^k I_j^k J_j^k K_j^k L_j^k M_j^k N_j^k O_j^k P_j^k E_j^k$. 由 E 的结构和式(2)，可知 U_j^k 中共有 $4^k - 4x_{2j-1}$ 个 $c^k - E$.

很容易看到 U_j^k 的直径为 $F_j^k J_j^k$，于是运用初等几何知识，如图 3 所示，在面 ABD 上通过点 A 作高 AS，并在三角形 ACS 中作两个高 CQ 和 $F_j^k R$. 由初等几何的知识知，A, R, Q, S 在同一条直线上. 并且，$|AQ| = \frac{2}{3}|AS| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 于是，$|CQ| = \sqrt{|AC|^2 - |AQ|^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

又由文文献［4］知，

$$|AF_j^k| = a = j \cdot c^{k-1} - c^k + \sum_{n=1}^{k-2}\left[\frac{j + 2^{n-2} - 1}{2^n}\right] \cdot (c^{k-n-1} - 2c^{k-n}), k \geqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 2^{k-2}$$

由相似三角形的性质，有

$$\frac{|F_j^k R|}{|CQ|} = \frac{|AF_j^k|}{|AC|}$$

于是，

$$|F_j^k R| = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

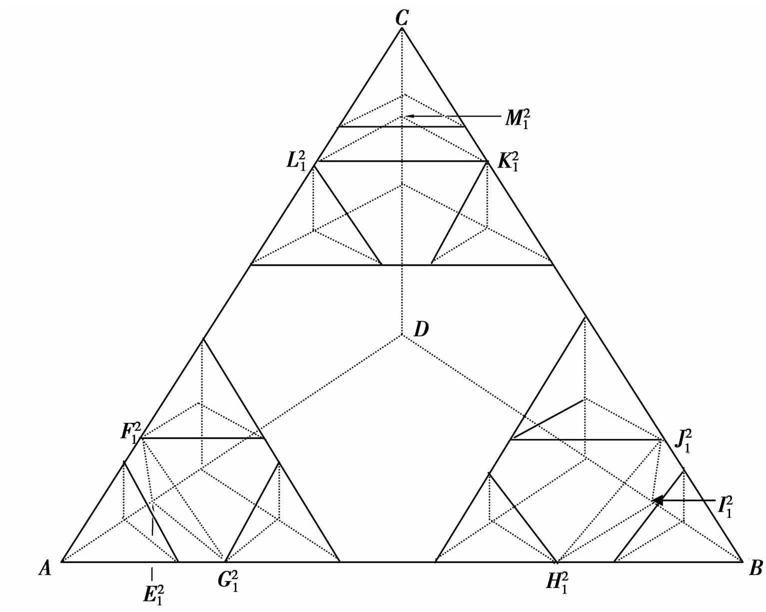

图 2　Sierpinski 结构

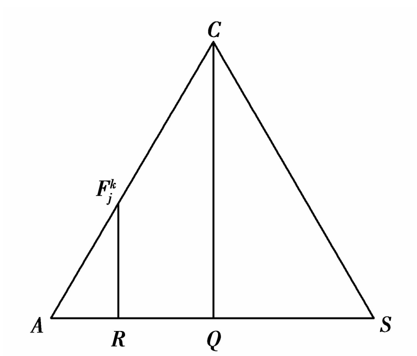

图 3　三角形结构一

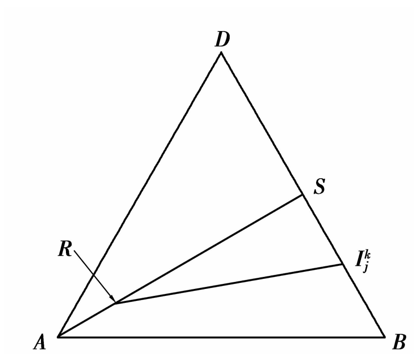

图 4　三角形结构二

如图 4 所示,

$$|SJ_j^k| = |SB| - |J_j^kB| = 0.5 - a$$

并且

$$|RS| = |AS| - |AR| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}|AG_j^k| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

于是,U_j^k 的直径为

$$|F_j^kJ_j^k| = \sqrt{|RF_j^k|^2 + |RJ_j^k|^2} = \sqrt{|RF_j^k|^2 + |RS|^2 + |SJ_j^k|^2} = \sqrt{2(a-0.5)^2 + 0.5}$$

因此,由引理 2 有:

$$H^s(S) \leqslant \frac{4^k}{4^k - x_{2j-1}}\cdot\{2(a-0.5)^2 + 0.5\}^{-\frac{\ln 2}{\ln c}} =$$

$$\frac{4^k}{4^k - x_{2j-1}}\cdot\{2(j\cdot c^{k-1} - c^k + \sum_{n=1}^{k-2}\left[\frac{j+2^{n-2}-1}{2^n}\right]\cdot(c^{k-n-1} - 2c^{k-n}) - 0.5)^2 + 0.5\}^{-\frac{\ln 2}{\ln c}}$$

其中,$k \geqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 2^{k-2}$.

注 1　定理 1 中的函数$\left[\frac{j+2^{n-2}-1}{2^n}\right]$是$\frac{j+2^{n-2}-1}{2^n}$的取整函数的函数值.

注 2　定理 1 有广泛的应用,当给出一个 Sierpinski 块,能马上得出它的上限估计.

注 3　通过定理 1,令

$$f(k,j,c) = \frac{4^k}{4^k - x_{2j-1}} \cdot \left\{2\left(j \cdot c^{k-1} - c^k + \sum_{n=1}^{k-2}\left[\frac{j+2^{n-2}-1}{2^n}\right]\cdot\left(c^{k-n-1} - 2c^{k-n}\right) - 0.5\right)^2 + 0.5\right\}^{-\frac{\ln 2}{\ln c}}$$

令 $k=3, j=1, c=0.5$,得到 $f(3,1,0.5)=0.83333333$. 这个结果比文献[5]中的结果 1.385 646 656 要好的多.

注 4　定理 1 中的计算很复杂,但是通过计算机可以得到更好的结果. 所以作者将在另一篇论文中来讨论这个问题[6].

参考文献:

[1] FALCONER K. Fractal Geometry [M]. New York:John Wiley and Sons,1990

[2] ZHOU Z Z. The Hausdorff measure of the self-similar set ——-the Koch curve [J]. Sci China (in Chinese) ser A,1998,28(2): 103-107

[3] ZHOU Z Z. The Hausdorff measure of Sierpinski gasket [J]. Sci China (in Chinese) Ser A,1997,27(6): 491-496.

[4] XU SH Y,SUI SH H,LIU J. The Hausdorff Measure of the Self-similar Set — a class of Sierpinski gasket[J]. Journal of Huaibei Industry Teachers College:Natural Science,2007,28(2) : 1-4

[5] WANG J M. The Hausdorff measure of the general Sierpinski block generated by normal tetrahedron[J]. Journal of Shanxi Normal University:Natural Science Edition,2002,30(5):5-11.

[6] SUN SH H,XIAO J Y,XU SH Y. On an algorithm of eht upper estimation of the Hausdorff measure of a class of Sierpinski gaskets [J]. Journal of Huaibei Industry Teachers College (Natural Science),2010,31(3): 6-9

The Estimate of the Hausdorff Measure of the General Sierpinski Block Generated by Regular Tetrahedron

SUN Shan-hui, WU Yi-min, LI Zhuang-zhuang

(School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Anhui Suzhou 234000, China)

Abstract: This paper firstly introduces the concept and construct of the general Sierpinski block generated by the regular tetrahedron, then offers the Hausdorff dimension of the general Sierpinski block generated by the regular tetrahedron, analyzes the status quo of the research on the Hausdorff measure, by constructing a new iterative sequence of number, gives a better formular for the estimate of the Hausdorff measure of the general Sierpinski block generated by the regular tetrahedron, and obtains the relevant results by calculation.

Key words: Sierpinski block; Hausdorff dimension; Hausdorff measure

责任编辑:李翠薇