文章编号:1672-058X(2013)01-0006-04

一类三阶具多偏差变元微分方程的周期解*

施吕蓉[1], 周宗福[2], 高 伟[1]
(1.芜湖职业技术学院,安徽 芜湖 241003;2.安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230000)

摘 要:研究了一类三阶具偏差变元的泛函微分方程:$x'''(t)+f(x'(t))+h(x(t))x'(t)+\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))=p(t)$. 的周期解的存在性,得到了若干结论.

关键词:泛函微分方程;偏差变元;周期解
中图分类号:O175.1,G424 **文献标志码**:A

1 基础知识

微分方程的周期解由于应用广泛而被人们广泛关注,近年来,一阶和二阶微分方程周期解的存在性研究已有很多结果.在三阶微分方程的研究中,文献[1][2]研究了三阶常微分方程

$$x'''(t)+ax''(t)+bx'(t)+cx(t)+g(t,x)=p(t)$$

文献[3]讨论了三阶具偏差变元微分方程

$$x'''(t)+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=p(t)$$

的2π-周期解的存在性.其中$f(x)\in C(\mathbf{R})$,$\tau(t)$,$p(t)$均为2π-周期连续函数.

这里,将研究方程

$$x'''(t)+f(x'(t))+h(x(t))x'(t)+\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))=p(t) \tag{1}$$

的T-周期解的存在性,其中$f(x)$,$g_i(t,x)(i=1,2,\cdots,n)$在$\mathbf{R}$上连续,g关于t为T周期的,$p(t)$及$\tau_1(t)$,$\tau_2(t)$,$\cdots$,$\tau_n(t)$都是以T为周期的连续函数.

引入下列记号:

令$C_T^1=\{x\mid x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+T)=x(t),\forall t\in\mathbf{R}\}$,其范数为$\|x\|=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0\}$.令$C_T=\{x\mid x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+T)=x(t),\forall t\in\mathbf{R}\}$,其范数为$\|x\|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|$.则$C_T^1$与$C_T$皆为Banach空间.

在C_T^1上定义线性算子L:Dom $L\subset C_T^1\to C_T$为$Lx=x'''(t)$,Dom $L=\{x\mid x\in C_T^1,x'''\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\}$.

定义投影算子P,Q

$$P:X\to \mathrm{Ker}\,L,Px=x(0)=x(T);Q:Y\to Y,Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,\mathrm{d}s$$

记$L_p:L|_{D(L)\cap \mathrm{Ker}P}\to \mathrm{Im}\,L$,则$L_p$可逆.其逆为

收稿日期:2012-06-25;**修回日期**:2012-08-26.
基金项目:安徽省高校自然科学研究项目(KJ2012Z430).
作者简介:施吕蓉(1982-),女,安徽芜湖人,讲师,硕士,从事微分方程研究.

$$L_p^{-1}y = -\frac{t}{T}\int_0^T (t-s)y(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s$$

易见算子方程 $Lx = Nx$ 与式(1)等价. 其辅助方程为

$$x'''(t) + \lambda f(x'(t)) + \lambda h(x(t))x'(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) = \lambda p(t) \tag{2}$$

利用辅助方程(2)，容易证得以下结果：

引理 1　若 $x(t)$ 是式(2)的一个 T－周期解，当(H_1)(H_3)或(H_2)(H_4)任一组条件成立时，

(H_1) $(g_i(t,u_1)-g_i(t,u_2))(u_1-u_2)>0, i=1,2,\cdots,n, \forall u_1,u_2\in\mathbf{R}$，且 $u_1\neq u_2, \forall t\in\mathbf{R}$.

(H_2) $(g_i(t,u_1)-g_i(t,u_2))(u_1-u_2)<0, i=1,2,\cdots,n, \forall u_1,u_2\in\mathbf{R}$，且 $u_1\neq u_2, \forall t\in\mathbf{R}$.

(H_3) 存在常数 $d>0$, $u[\sum_{i=1}^{n} g_i(t,u) - p(t)] > 0, \forall t\in\mathbf{R}, |u| \geqslant d$.

(H_4) 存在常数 $d>0$, $u[\sum_{i=1}^{n} g_i(t,u) - p(t)] < 0, \forall t\in\mathbf{R}, |u| \geqslant d$. 则 $\|x\|_0 \leqslant d + \frac{1}{2}\|x'\|_0$.

对方程(1)，假设存在非负常数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5，且 $k_1+k_2\neq0, k_3+k_4\neq0$，使得

(H_5) $f(v)\leqslant0, |g_i(t,v)|\leqslant k_1|v|+k_2, i=1,2,\cdots,n, \forall v\in\mathbf{R}, t\in\mathbf{R}$

$$\sum_{i=1}^{n}[g_i(t,v)-p(t)] \leqslant k_3v+k_4, i=1,2,\cdots,n, t\in\mathbf{R}, v>d$$

(H_6) $f(v)>0, |g_i(t,v)|\leqslant k_1|v|+k_2, i=1,2,\cdots,n, \forall v\in\mathbf{R}, t\in\mathbf{R}$

$$\sum_{i=1}^{n}[g_i(t,v)-p(t)] \geqslant -k_3v-k_4, i=1,2,\cdots,n, t\in\mathbf{R}, v>d$$

(H_7) $|h(x)|\leqslant Tk_5, \forall x\in\mathbf{R}$.

2　主要结果

定理 1　若(H_1)(H_3)成立，并且条件(H_5)(H_7)或者(H_6)(H_7)成立，则当 $2(n-1)k_1+k_3<\frac{2}{T^3}$ 时，方程(1)至少存在一个 T－周期解.

证明　记方程(2)的所有 T－周期解组成的集合

$$\Omega_0 = \{x\,|\,x\in D(L), Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,1)\}$$

$\forall x\in\Omega_0$，对方程(2)两端从 0 到 T 积分，有

$$\int_0^T f(x'(t))\mathrm{d}t + \int_0^T[\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)]\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

记　$E_1 = \{t\,|\,t\in[0,T], x(t-\tau_1(t)) < -d\}$; $E_2 = \{t\,|\,t\in[0,T], x(t-\tau_1(t)) \geqslant -d\}$

$E_3 = \{t\,|\,t\in[0,T], x(t-\tau_1(t)) \geqslant d\}$; $E_4 = \{t\,|\,t\in[0,T], x(t-\tau_1(t)) \leqslant d\}$

则

$$\int_{E_1}|\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)|\mathrm{d}t = -\int_0^T[\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)]\mathrm{d}t =$$

$$\int_{E_2}|\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)|\mathrm{d}t - \int_0^T[\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)]\mathrm{d}t -$$

$$\int_0^T\sum_{i=2}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T\sum_{i=2}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t =$$

$$\int_{E_2}|\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t))) - p(t)|\mathrm{d}t - \int_0^T\sum_{i=2}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t +$$

$$\int_0^T\sum_{i=2}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T f(x'(t))\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\int_{E_2}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t+\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\right|\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\right|\mathrm{d}t=$$

$$\int_{E_3}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t\int_{E_4}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t+$$

$$2\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\right|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^{\mathrm{T}}(k_3\|x\|_0+k_4)+GT+2(n-1)\int_0^{\mathrm{T}}(k_1\|x\|_0+k_2)\mathrm{d}t=$$

$$T(k_3\|x\|_0+k_4)+GT+2(n-1)T(k_1\|x\|_0+k_2)=$$

$$T[2(n-1)k_2+k_4+G]+T[2(n-1)k_1+k_3]\|x\|_0 \tag{4}$$

其中, $G=\max\limits_{t\in[0,T],\ |v|\leqslant d}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right].$

所以

$$\int_0^{\mathrm{T}}|f(x'(t))|\mathrm{d}t=-\int_0^{\mathrm{T}}f(x'(t))\mathrm{d}t=\int_0^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right]\mathrm{d}t=$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t+\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t=$$

$$\int_{E_1}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right]\mathrm{d}t+\int_{E_3}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right]\mathrm{d}t+$$

$$\int_{E_4}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right]\mathrm{d}t-\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_{E_1}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t\int_{E_3}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t+$$

$$\int_{E_4}\left|\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right|\mathrm{d}t-\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\right|\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=2}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))\right|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$2T[2(n-1)k_2+k_4+G]+2T[2(n-1)k_1+k_3]\|x\|_0 \tag{5}$$

由引理1并结合(H_5)(H_7)可知

$$\|x''\|_0\leqslant\left\|\frac{1}{2}\|x'''\|_0\right.=\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}f(x'(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}h(x(t))x'(t)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))-p(t)\right]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$2T[2(n-1)k_2+k_4+G]+2T[2(n-1)k_1+k_3]\|x\|_0+2Tk_5\leqslant$$

$$2T[2(n-1)k_2+k_4+k_5+G]+2T[2(n-1)k_1+k_3]\left(d+\frac{1}{2}\|x'\|_0\right)\leqslant$$

$$2T[2(n-1)k_2+k_4+k_5+G]+2T[2(n-1)k_1+k_3]\left(d+\frac{T}{2}\|x'\|_0\right)=$$

$$2T[2(n-1)(k_1d+k_2)+k_3d+k_4+k_5+G]+T^2[2(n-1)k_1+k_3]\|x'\|_0\leqslant$$

$$2T[2(n-1)(k_1d+k_2)+k_3d+k_4+k_5+G]+T^2[2(n-1)k_1+k_3](d+\frac{1}{2}\|x''\|_0)\leqslant$$
$$2T[2(n-1)(k_1d+k_2)+k_3d+k_4+k_5+G]+T^2[2(n-1)k_1+k_3](d+\frac{T}{2}\|x''\|_0)=$$
$$2T[2(n-1)(k_1d+k_2)+k_3d+k_4+k_5+G]+T^2d[2(n-1)k_1+k_3]+$$
$$\frac{T^3}{2}[2(n-1)k_1+k_3]\|x''\|_0 \tag{6}$$

由于 $2(n-1)k_1+k_3<\frac{2}{T^3}$,所以

$$\|x''\|_0\leqslant\frac{2T[2(n-1)(k_1d+k_2)+k_3d+k_4+k_5+G]+T^2d[2(n-1)k_1+k_3]}{1-T^3(n-1)k_1-\frac{T^3}{2}k_3}\equiv K_2 \tag{7}$$

$$\|x'\|_0\leqslant d+\frac{T}{2}K_2\equiv K_1 \tag{8}$$

$$\|x\|_0\leqslant d+\frac{T}{2}K_1\equiv K_0 \tag{9}$$

因而存在与 λ 无关的常数 $K>K_0+K_1+K_2$,使得 $\|x\|<K$.

取 $\Omega=\{x\mid x\in C_T^1,\|x\|<M\}$,则 N 在 Ω 上是 $L-$紧的. 且当 $x\in\partial\Omega\cap D(L)$ 时,对 $\forall\lambda\in(0,1)$,有 $Lx\neq\lambda Nx$, $\forall x\in\partial\Omega\cap\ker L$,有 $Nx\notin \mathrm{lm}\, L$.

作变换 $F:(\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L)\times[0,1]\to\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$,定义

$$F(x,u)=-(1-u)x-\frac{u}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=1}^n g_i(t,u)-p(t)\right|\mathrm{d}t \tag{10}$$

显然有 $xF(x,u)=-(1-u)x^2-\frac{ux}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=1}^n g_i(t,u)-p(t)\right|\mathrm{d}t\neq 0$.

故 $F(x,u)$ 为同伦映射,取 J 为恒同映射,则

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}=\deg\{F(\cdot,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}=\deg\{-x,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$$

根据文献[4]的结论,方程(1)至少存在一个 $T-$周期解. 同理可得(H_1)(H_3)(H_6)(H_7)成立时,定理 1 依然成立. 证毕.

类似于定理 1 的证法,可以证明下列结论成立.

定理 2　若(H_2)(H_4)成立,并且条件(H_5)(H_7)或者(H_6)(H_7)成立,则当 $2(n-1)k_1+k_3<\frac{2}{T^3}$ 时,方程(1)至少存在一个 $T-$周期解.

参考文献:

[1] KIGURADZE I T,PUZA B. On periodic solutions of system of differential equations with deviating arguments[J]. Nonlinear Anal TMA,2000,42:229-242

[2] MARTINS R F. The existence of periodic solutions for second order differential equation with singularities and the strong force condition[J]. Math Anal Appl,2006,317:1-13

[3] 汪娜,鲁世平. 一类三阶具偏差变元微分方程的周期解[J]. 安徽师范大学学报,2006,29(1):17-22

[4] GAINES R E,MAWHIN J K. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equation[A]. Lecture Notes in math[C]. Berlin: Springer-Verlag, 1977

(下转第 15 页)