文章编号:1672 -058X(2012)12 -0023 -05

纽结的 Vassiliev 不变量及其性质*

霍承刚[1],王树新[2]
(1. 宿州学院 数学与统计学院,安徽 宿州 234000;2. 辽宁师范大学 数学系,辽宁 大连 116029)

摘　要:介绍一类重要的纽结不变量,即 Vassiliev 不变量;给出了纽结 Vassiliev 不变量的的一些性质及其作用在特殊纽结上的相关结论.

关键词:纽结;环链;Vassiliev 不变量
中图分类号:O189　　　　**文献标志码**:A

纽结是三维空间中的简单闭曲线,简单闭曲线意思是连通的(连成一体的)、封闭的(没有端点的)、不自交的(自己与自己不相交的,即没有粘连的)曲线. 寻找拓扑不变量是拓扑学的重要议题之一,作为低维拓扑一个分支的纽结其任务亦然. 在 1989 年间,V. Vassiliev 和 M. Goussarov 各自独立地引进了有限阶纽结不变量的概念,也称为 Vassiliev 纽结不变量. 显然,Vassiliev 不变量是低维拓扑中相当新的一个概念. Vassiliev 是基于对流形光滑映射的判别式(即带奇异点映射)研究而引入这一概念的. 后来 Birman 和 Lin 给出了 Vassiliev 不变量的公理描述. 此处采用 Birman-Lin 所引进的 Vassiliev 不变量的定义. Vassiliev 不变量是一个极具特色的纽结不变量,比如它有着类似多项式的性质等. Vassiliev 不变量引起了广泛的兴趣和关注. Vassiliev 不变量被证明至少同琼斯多项式及其源于各种量子群的一般形式具有同等作用. 像纽结的 Conway 多项式的系数,Jones 多项式的导数在 1 的值等被证明是 Vassiliev 不变量. 人们从不同的角度去研究刻画 Vassiliev 不变量的特性. 例如:Y. Ohyama 利用纽结的相似性研究它;Ted. Stanford 利用辫交换子刻画其特点;Y. Ohyama 和 Harumi Yamada 利用 C_n - move 进行研究等. 近年来对其研究越来越多,相信在对纽结的分类过程中,它势必扮演比各色纽结多项式更重要的作用[1-11].

此处将对纽结的 Vassiliev 不变量进行介绍,给出了纽结 Vassiliev 不变量的的一些性质及其作用在特殊纽结上的相关结论.

对值域为阿贝尔群的纽结不变量,可以通过下述线束关系:

$$v(K_D) = v(K_+) - v(K_-) \tag{1}$$

定义奇异纽结的不变量,其中 K_D,K_+,K_- 表示局部如图 1:

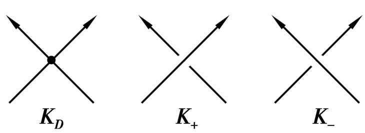


图 1　局部不同的纽结图表

而其余部分完全相同的纽结图表.

收稿日期:2012 -06 -06;**修回日期**:2012 -07 -08.
* **基金项目**:宿州学院一般科研项目(2012yyb05).
作者简介:霍承刚(1980-),男,山东德州人,讲师,硕士,从事低维拓扑研究.

定义1　设 v 为值域在阿贝尔群的纽结不变量,如果对任意多于 n 个奇异点的纽结有 $v(K)=0$,则称此不变量为 n 阶 Vassiliev 不变量,通常记为 v_n.

注1　此定义可自然的扩充到环链上.

从不变量的定义及线束关系式(1)可以得到如下事实:记 K^n 为有 n 个奇异点的纽结,则交换它的一系列交叉点而值 $v_n(K^n)$ 不变(其值仅由奇异点位置决定). 特别地 $v(K^n)=v(\overline{K^n})$,其中 $\overline{K^n}$ 表示镜面像. 再由 $v_n(K^{n+1})=0$,联想到如果 $f:R\to R$ 为常值映射,则对 $\forall x\in R$,有 $f(x)=f(-x)$.

定义2　设 v,w 为两个纽结不变量,定义它们的乘积如下:

$$v.w(K)=v(K)w(K) \tag{2}$$

利用归纳法易证明下面定理.

定理1　令 v,w 为纽结 J 的 Vassiliev 不变量,K 为有 i 个奇异点的纽结,则

$$(v.w)^{(i)}(K)=\sum_{J\subseteq\{1,\cdots,i\}} v^{(|J|)}(K_J).w^{(|\bar{J}|)}(K_{\bar{J}}),\bar{J}=\{1,\cdots,i\}\backslash J \tag{3}$$

此定理类似于分析 Leibniz 定理:

若 $f,g:R^n\to R$ 为函数,则

$$\frac{\partial^{i(fg)}}{\partial x_1\cdots\partial x_i}=\sum_{J\subseteq\{1,\cdots,i\}}\frac{\partial^{|J|}f}{\partial x_J}.\frac{\partial^{|\bar{J}|}g}{\partial x_{\bar{J}}} \tag{4}$$

其中 $\bar{J}=\{1,\cdots,i\}\backslash J$,且对 $J=\{j_1,\cdots,j_l\}$,$\partial x_J=\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_l}$.

推论2　若 v,w 分别为 m 阶和 n 阶纽结不变量,则 $v.w$ 为阶 $n+m$ 不变量.

证明　当 $v.w$ 作用于任意有 $n+m+1$ 个奇异点的纽结时,由定理1可知,和式中每项要么 $|J|>m$,要么 $|\bar{J}|>m$. 从而 $v^{(|J|)}=0$ 或 $w^{(|\bar{J}|)}=0$,所以 $v.w^{(n+m+1)}=0$. Conway 多项式即得证.

定义3　构架是指在不交圆上有 $2d$ 个点,构成 d 个配对. 例如图2

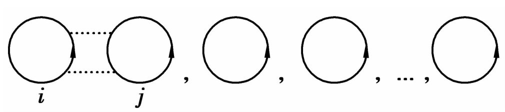


图2　[2]—构架例子

为一个构架,其中虚线表明配对. 如果在环链 G 中一个奇异点对应构架中一对配点,则一个有 d 个奇异点的环链 G 对应一个[d]-构架. 下面的奇异环链对应图2的构架:

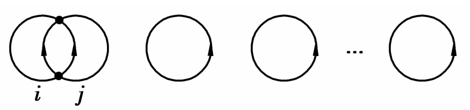
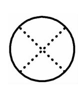
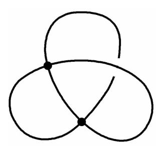


图3　奇异环链

另外对于二构架:



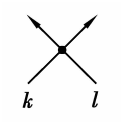
对应的奇异纽结为:



令 $L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n$ 为有序定向的 n－分支环链,$\lambda_{ij}(L)$表示 L_i 与 $L_j(i<j)$的环绕数．下面给出一个 1 阶不变量的例子.

例 1　$\lambda_{ij}(L)$是阶为 1 的 Vassiliev 不变量.

证明　这只需证明对所有带一个顶点



的奇异环链有 λ_{ij}为常数即可,其中 k,l 表示所在的分支号.

不失一般性,假设 $k\leqslant l$. 若 $k=l$,则其对应下面的[1]—构架:

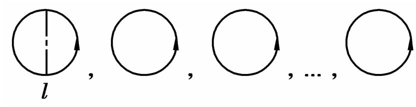
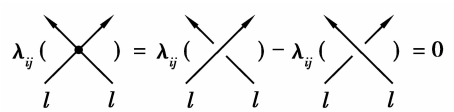


图 4　$k=l$ **对应[1]—构架**



若 $k<l$,其对应下面的[1]－构架:

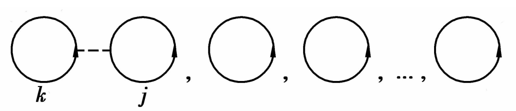
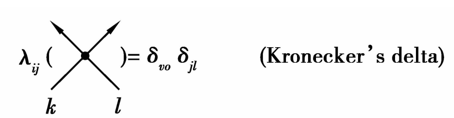
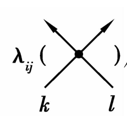


图 5　$k<l$ **对应[1]—构架**

则





仅由[1]－构架决定(即它可由 i,j,k,l 来表示),λ_{ij}为阶 1 的 Vassiliev 不变量.

由例 1 再结合 Vassiliev 不变量的线性有下面的事实:

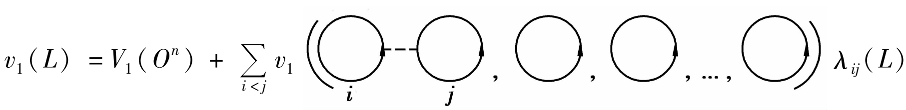
定理 2　固定整数 $n\geqslant 1$,令 a 和 $b_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant n)$为常数(仅取决于 n),对 n－分支环链,令

$$w_1(L)\ =\ a\ +\ \sum_{i<j}b_{ij}\lambda_{ij}(L)$$

则 w_1 为阶 1 的 Vassiliev 不变量.

进一步地,在文献[12]中给出了下面的定理:

定理 3　设 v_1 是 n－分支有序定向环链的阶 1 不变量,则对任意分支定向有序环链有:



其中 o^n 表示 n 个分支的平凡环链.

定理 4 说明了纽结的系数与 Vassiliev 不变量的关系.

定理 4 经过适当的变量替换,Homfly 多项式的泰勒展式的系数为有限阶的.

证明 Homfly 多项式的一种标准形式是以 q 和 N 为参数的多项式,且满足下列等式:

$q^{N/2}P($  $)-q^{-N/2}P($  $)=(q^{1/2}-q^{-1/2})P($  $)$ (5)

若令 $q=\mathrm{e}^{x}$,然后展成 x 次幂形式,则上式可变形为:

$P($  $)-P($  $)$ (6)

式(6)为关于 x 的"一团"的表达式,其中"一团"表示此部分比较复杂,但不管它是什么,此时多项式的系数是有限阶的.

注 2 Jones 多项式是 Homfly 多项式对 $N\equiv 2$ 的情况,所以由定理 4 的证明可知 Jones 多项式经过适当变量替换,它们泰勒展式的系数也为有限阶的.

注 3 类似于定理 4 的证明,对 Kauffman 多项式也有相同结论成立.

另外,纽结的 Jones 多项式的 n 阶导数在 1 的取值为 n 阶不变量,而且 Jones 多项式的系数不是有限阶的,但可以用有限阶不变量来逼近[11].

对特殊纽结计算 Vassiliev 不变量有下面两个结论.

定理 5 设 K^{n} 为有 n 个奇异点的纽结,由 Vassiliev 线束关系式去掉奇异点计算其 Conway 多项式,则当拆得为平凡纽结时,z^{n} 的系数为 1;当拆得为分离环链时,z^{n} 的系数为 0.

证明 令 $C(K)(z)$ 表示纽结的 Conway 多项式,仍用 C 表示其在奇异纽结上的扩展. 由 Conway 多项式的定义及线束关系有

$C($  $)=C($  $)-C($  $)=z\cdot C($  $)$ (7)

由关系式(6)知每去掉一个奇异点,z 的次数升高一次再结合平凡纽结和分离环链的 Conway 多项式即得证.

下面将描述一个关于有平凡 Conway 多项式的纽结,当其对应的 V_3 值(此处 V_3 简记纽结的 Jones 多项式的三阶导数在 1 的值)满足一定条件时,它的 Vassiliev 值的特点.

定理 6 若 K 为有平凡 Conway 多项式的纽结,则当 K 对应的值 V_3 为 72 的倍数时,其三阶的 Vassiliev 值 $v_3(K)$ 为整数.

证明 Polyak-Viro 给出了不变量 v_3 的计算公式:

$$v_3=-\frac{1}{12}V_2-\frac{1}{36}V_3 \tag{8}$$

在文献[8]中,给出了 v_4 的计算公式:

$$v_4=-\frac{V_4}{144}+2\nabla_2^2-\frac{5}{2}\nabla_4-\frac{V_3}{24}+\frac{\nabla_2}{12} \tag{9}$$

则当 K 有平凡的 Conway 多项式时有:

$$v_4=-\frac{V_4}{144}-\frac{V_3}{24}$$

由 v_4 的整性及事实 $144\mid V_4$ 有 $144\mid -V_4-6V_3$,进一步 $24\mid V_3$. 当 K 有平凡的 Conway 多项式时,式(8)变为 $v_3=-\frac{1}{36}V_3$,结合 $24\mid V_3$,定理得证.

参考文献:

[1] BARNATAN D. On the Vassilliev knot invariants[J]. T opology, 1995, 34 :423-472

[2] OHYAMA Y. Vassiliev invariants and similarity of knots[J]. Proc Amer Math Soc,1995,123: 287-291

[3] STANFORD T. Braid commutators and Vassiliev invariants[J]. Pacific J Math,1996,174: 269-276

[4] Yasutaka Nakanishi, OHYAMA Y. knots with given finite type invariants and Conway polynomial [J]. Knot Theory Ramifications,2006, 15 (2):205-215

[5] ZHU J. On Jones knot invariants and Vassiliev invariants[J]. New Zealand, J Math, 1998, 27(2) : 293-299

[6] STOIMENOW A. Vassiliev invariants and rational knots of unknotting number one[J]. Topology ,2003,42(1) : 227-241

[7] STOIMENOW A . On the Polyak-Viro Vassiliev invariants of degree 4[J]. Canad Math Bull,1998, 32(2) :1-15

[8] BIRMAN J S. New points of view in knot theory[J]. Amer Math Soc Bull,1993, 28 (2):331-338

[9] BIRMAN J S, LIN X S. Knot polynomials and Vassiliev's invariants[J]. Inventiones mathematicae,1993, 111: 225-270

[10] KOFMAN I. Approximating Jones coefficients and other link invariants by Vassiliev invariants[J]. Journal of knot theory and its ramifications, 2000,9(7):955-966

[11] MURAKAMI H . Vassiliev invariants of type two for a link[J]. Proc Amer Math Soc, 1996, 124 : 3889-3896

[12] JEONG M-J, PARK C-Y. Polynomial invariants and Vassiliev invariants[J]. Geometry and Topology monographs, 2001, 4(2):89-101

Vassiliev Invariants of Knots and Their Properties

HUO Cheng-gang[1] ,WANG Shu-xin[2]

(1. School of Mathematics and Statistics,University of Suzhou,Anhui Suzhou 234000, China;

2. Department of Mathematics,Normal University of Liaoning,Liaoning Dalian 116029,China)

Abstract: This paper introduces a class of important knot invariants, i. e. Vassiliev invariants, and gives some properties of knot Vassiliev invariants and the related conclusion on their action on special knot.

Key words: knot; link; Vassiliev invariant

责任编辑:李翠薇