文章编号:1672－058X(2012)12－0008－03

广义行(列)对称矩阵的 Moore-Penrose 逆*

郭 伟

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:提出了广义行(列)对称矩阵概念,研究了它的满秩分解和奇异值分解,利用这两种分解以及正交相抵,得到 3 种广义行列对称矩阵 Moore-Penrose 逆的快速算法,可极大节省其计算量和存储量;推广了相关文献的结果,使其应用范围更广.

关键词:广义行列对称矩阵;满秩分解;奇异值分解;正交相抵;Moore-Penrose 逆

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

满秩分解和奇异值分解及 Moore-Penrose 逆有广泛的应用背景,如信号处理、神经网络、统计学、最小二乘问题、最优化问题及工程应用问题等.许多应用领域(如控制、工程、信息等)中大量出现各种对称现象(矩阵),有关于主对角线对称的,有关于次对角线对称的,也有关于行列对称的.近年来,人们对次对称和行(列)对称矩阵作了大量的研究,也取得了丰富的结果[2-7].随着应用的不断深入和广泛,有必要将行(列)对称矩阵拓广.此处提出广义行(列)对称矩阵概念,给出它的满秩分解、奇异值分解及 Moore-Penrose 逆的快速计算公式,据此可极大节省其计算量和存储量,提高其应用效率.

文中 A^{T},A^{H},A^{+} 表示矩阵 A 的转置矩阵、共轭转置矩阵、Moore-Penrose 逆矩阵;P 表示置换矩阵,即由单位矩阵经若干次行(列)交换所得到的矩阵;$R^{m\times n}$ 表示实数域上 $m\times n$ 矩阵的集合;$R_r^{m\times n}$ 表示实数域上秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵集合;E 表示单位矩阵;J 表示次单位矩阵,即次对角线上元素为 1,其余元素为 0 的矩阵.

定义 1 称矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix}\in R^{2m\times n}$($A=[B\quad BP]\in R^{m\times 2n}$)为广义行(列)对称矩阵.

若 $P=J$ 时,广义行(列)对称矩阵即为文献[4]中的行(列)对称矩阵.

定理 1 设 $B\in R_r^{m\times n}$ 的满秩分解为 $B=FG$,$F\in R_r^{m\times r}$,$G\in R_r^{r\times n}$,则矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix}\in R_r^{2m\times n}$ 的满秩分解为 $A=\begin{bmatrix} F \\ PF \end{bmatrix}G$ 且 $A^{+}=\frac{1}{2}[B^{+}\quad B^{+}P^{\mathrm{H}}]$.

证明 $\begin{bmatrix} F \\ PF \end{bmatrix}G=\begin{bmatrix} FG \\ PFG \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix}=A.$

由条件及文献[1],$B^{+}=G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$,则

$$A^{+}=G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}\left(\begin{bmatrix} F \\ PF \end{bmatrix}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix} F \\ PF \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} F \\ PF \end{bmatrix}^{\mathrm{H}}=$$

$$\frac{1}{2}G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}[F^{\mathrm{H}}\quad F^{\mathrm{H}}P^{\mathrm{H}}]=$$

收稿日期:2012－04－06;**修回日期**:2012－04－23.

* **基金项目**:重庆市教委科技项目(KJ090729).

作者简介:郭伟(1963-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论及应用研究.

$$\frac{1}{2}[G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}\quad G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}P^{H}] = \frac{1}{2}[B^{+}\quad B^{+}P^{H}]$$

定理 2　设 $B \in R_r^{m\times n}$ 的满秩分解为 $B = FG, F \in R_r^{m\times r}, G \in R_r^{r\times n}$,则矩阵 $A = [B\quad BP] \in R_r^{m\times 2n}$ 的满秩分解为 $A = F[G\quad GP]$ 且 $A^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} B^{+} \\ P^{H}B^{+} \end{bmatrix}$.

证明与定理 1 类似,略.

定理 3　设 $B \in R^{m\times n}, m \geqslant n, B = QDV^{T}$ 为 B 的奇异值分解,其中正交矩阵 $Q \in R^{m\times m}, V \in R^{n\times n}, D = \begin{bmatrix} \Sigma \\ O \end{bmatrix}$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$. 则 $A = \begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} \in R^{2m\times n}$存在一个奇异值分解 $A = UTV^{T}, A^{+} = V[(\sqrt{2}\Sigma)^{-1}\quad O]U^{T}$,其中 $V = \begin{bmatrix} \sqrt{2}D \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\Sigma \\ O \end{bmatrix}, U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & -P^{T} \\ PQ & E \end{bmatrix} \in R^{2m\times 2m}$.

证明　$A^{T}A = \begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} = 2B^{T}B = 2VD^{T}Q^{T}QDV^{T} = V(2\Sigma^{2})V^{T}$,所以 $2\sigma_1^2, 2\sigma_2^2, \cdots, 2\sigma_n^2$ 为 A 的特征值,从而$\sqrt{2}\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_2, \cdots, \sqrt{2}\sigma_n$ 为 A 的奇异值. 又因为 $U^{T}U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q^{T} & Q^{T}P^{T} \\ -P & E \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & -P \\ PQ & E \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2E_m & O \\ O & 2E_m \end{bmatrix} = E_{2m}$,所以 U 是正交矩阵.

$$UTV^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & -P^{T} \\ PQ & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}D \\ O \end{bmatrix}V^{T} = \begin{bmatrix} QDV^{T} \\ PQDV^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} = A$$

由文献[5], $A^{+} = V[(\sqrt{2}\Sigma)^{-1}\quad O]U^{T}$.

定理 4　设 $B \in R^{m\times n}, m \geqslant n, B = UDQ^{T}$ 为 B 的奇异值分解,其中正交矩阵 $U \in R^{m\times m}, Q \in R^{n\times n}, D = [\Sigma\quad O], \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$. 则 $A = [B\quad BP] \in R^{m\times 2n}$存在一个奇异值分解 $A = UTV^{T}, A^{+} = Q\begin{bmatrix} (\sqrt{2}\Sigma)^{-1} \\ O \end{bmatrix}V^{T}$,其中 $Q = [\sqrt{2}D\quad O] = [\sqrt{2}\Sigma\quad O], V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q^{T} & Q^{T}P \\ -P^{T} & E \end{bmatrix} \in R^{2n\times 2n}$.

证明与定理 3 类似,略.

定理 5　$A = \begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} \in R^{2m\times n}$ 与 $\sqrt{2}\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}$正交相抵, $A^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}[B^{+}\quad O]U^{T}$,其中正交矩阵 $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & E \\ P & -P \end{bmatrix} \in R^{2n\times 2n}$.

证明　$U^{T}U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & P^{T} \\ E & -P^{T} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & E \\ P & -P \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2E_m & O \\ O & 2E_m \end{bmatrix} = E_{2m}$

所以 U 是正交矩阵.

又因为 $U^{T}AE = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & P^{T} \\ E & -P^{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}$,所以 A 与$\sqrt{2}\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}$正交相抵.

由文献[6]定理 6, $A^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}[B^{+}\quad O]U^{T}$.

同理可得:

定理 6　$A = [B\quad BP] \in R^{m\times 2n}$ 与 $\sqrt{2}[B\quad O]$ 正交相抵, $A^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}U\begin{bmatrix} B^{+} \\ O \end{bmatrix}$,其中正交矩阵 $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & E \\ P^{T} & -P^{T} \end{bmatrix} \in R^{2m\times 2m}$.

下面以广义行对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ PB \end{bmatrix} \in R^{2m\times n}$ 为例给出其 Moore-Penrose 逆的快速算法.

算法 1:

步骤 1　求 B 的满秩分解 $B=FG$.

步骤 2　求 $B^{+}=G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$.

步骤 3　求 $A^{+}=\frac{1}{2}[B^{+}\quad B^{+}P^{\mathrm{H}}]$.

算法 2:

步骤 1　求 B 的奇异值分解 $B=QDV^{\mathrm{T}}$.

步骤 2　写出 $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & -P^{\mathrm{T}} \\ PQ & E \end{bmatrix}$.

步骤 3　求 $A^{+}=V[(\sqrt{2}\Sigma)^{-1}\quad O]U^{\mathrm{T}}$.

算法 3:

步骤 1　写出正交矩阵 $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} E & E \\ P & -P \end{bmatrix}$.

步骤 2　求 B^{+}.

步骤 3　求 $A^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}[B^{+}\quad O]U^{\mathrm{T}}$.

参考文献:

[1] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004

[2] 秦兆华. 关于实次对称矩阵与反次对称矩阵[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,1985(1):100-110

[3] 郭伟. 广义次对称矩阵与广义次正交矩阵[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2000,25(1):18-22

[4] 袁晖坪. 行(列)对称矩阵的满秩分解和正交对角分解[J]. 上海理工大学学报,2007,29(3):260-264

[5] 郭伟. o-对称矩阵的奇异值分解及算法[J]. 数学杂志,2009,29(3):344-350

[6] 蔺小林,蒋耀林. 酉对称矩阵的 QR 分解及其算法[J]. 计算机学报,2005,28(5):818-822

[7] 郭伟. 对称矩阵和正交矩阵的推广及其应用[J]. 重庆工商大学学报:然科学版,2011,28(5):449-452

The Moore-Penrose Inverse for Generalized Row (Column) Symmetric Matrix

GUO Wei

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The concept of generalized row (column) symmetric matrix is given, its full rank decomposition and singular value decomposition are studied. By the two decompositions and orthogonal equivalence, three shortcut counting methods of the Moore-Penrose inverse for generalized row (column) symmetric matrix are obtained, which can dramatically reduce the amount of calculation and save the CPU time and memory, which extend the results of the related references and which spread its application scope.

Key words: generalized row (column) symmetric matrix; full rank decomposition; singular value decomposition; orthogonal equivalence; Moore-Penrose inverse

责任编辑:李翠薇