文章编号:1672 - 058X(2012)12 - 0006 - 02

随机紧集的构造和性质

邱 沛 光
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:给出了随机紧集的定义,并研究了它的构造和有关性质.

关键词:随机紧集;初等随机紧集;随机凸紧集
中图分类号:O211　　**文献标志码**:A

1　随机紧集的定义

R^d 为 d 维欧氏空间,恒以 K 表示 R^d 中非空紧子集全体,$co\ K = \{A \in K: A$ 凸$\}$. 以 $\beta(K)$ 和 $\beta(co\ K)$ 分别表示由 K 和 $co\ K$ 中所有开集产生的 Borel σ 代数,(Ω, F, P) 表示概率空间.

定义 1　称 $X: \Omega \to K$ 是随机紧集,如果 $X \in F/\beta(K)$;同样,称 $X: \Omega \to co\ K$ 是随机紧凸集,如果 $X \in F/\beta(co\ K)$,随机紧集和随机紧凸集分别简记为 RCS 和 RCCS.

定义 2　称 $X: \Omega \to K$ 是初等 RCS(或 RCCS),如果存在 $\{E_n, n = 1, 2, \cdots\} \subset F$, $E_n, n = 1, 2, \cdots$ 两两不交, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ 和 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\} \subset K$(或 $co\ K$),使得 $X = \sum_{n=1}^{\infty} I_{E_n} A_n$. 其中 I_{E_n} 是集合 E_n 的特征函数.

命题 1　设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一列 RCS,且 $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n, X) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$,则 X 是 RCS.

证明　对固定的 $\omega \in \Omega$,有 $\{X_n(\omega), n \geqslant 1\} \subset K$,由条件 $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n(\omega), X(\omega)) = 0$ 及 K 的完备性,$X(\omega) \in K$. 设 G 是 K 中的开集,由 $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n, X) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$,有

$$X^{-1}(G) = \{\omega: X(\omega) \in G\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{\omega: X_n(\omega) \in G\}$$

由单调类定理[1]知,X 是 RCS,证毕.

关于 RCS,有如下的结果.

定理 1[2]　设 $X: \Omega \to K$,则 X 是 RCS $\Leftrightarrow \forall A \in K$,有 $\{\omega: X(\omega) \cap A \neq \varnothing\} \in F$.

2　随机紧集的构造

由于 (K, ρ) 是完备可分度量空间,因此,存在可数稠子集,不妨以 $\{K_n, n \geqslant 1\}$ 表示 K 中的可数稠子集. 为了得到构造性定理,先证明两个引理.

引理 1　设 X 是 RCS,对 $\lambda > 0$,定义

$$E_n(\lambda) = \{\omega \in \Omega: \rho(X(\omega), K_n) \leqslant \lambda\}, n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

收稿日期:2012 - 05 - 18;**修回日期**:2012 - 06 - 04.

作者简介:邱沛光(1963-),男,重庆人,硕士,副教授,从事概率与统计研究.

则 $E_n(\lambda)\in F, n=1,2,\cdots$,且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda)=\Omega$.

证明　由于 $\rho(\cdot,\cdot)$ 连续,故 $\rho(X,E_n)$ 是随机变量,从而 $E_n(\lambda)\in F, n=1,2,\cdots$. 下面证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda)=\Omega$,显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda)\subset\Omega$,为此,只需证明:$\forall\omega\in\Omega$,有 $\omega\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda)$. 由于 $X(\omega)\in K$,而 $\{K_n,n\geqslant1\}$ 在 K 中稠,故存在 n_0,使得 $\rho(X(\omega),K_{n_0})\leqslant\lambda$,从而 $\omega\in E_{n_0}(\lambda)$,证毕.

引理 2　对引理 1 中的 $E_n(\lambda), n=1,2,\cdots$,令 $F_n(\lambda)=E_n(\lambda)-[\bigcup_{m=1}^{n-1}E_m(\lambda)], n=1,2,\cdots$,规定 $E_0(\lambda)=\varnothing$,则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(\lambda)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda)$, $F_n(\lambda), n=1,2,\cdots$两两不交,且对 $\omega\in F_n(\lambda)$,有 $\rho(X(\omega),K_n)\leqslant\lambda$.

证明　显然成立.

由此得到 RCS 的构造定理.

定理 2　设 $X:\Omega\to K$,则 X 是 RCS$\Leftrightarrow X$ 是初等 RCS 依 ρ 对 $\omega\in\Omega$ 的一致极限.

证明　设 X 是 RCS,沿用引理 1、引理 2 的记号,对 $\lambda=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$,令

$$X_n(\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}I_{F_m(1/n)}(\omega)\cdot K_m \tag{2}$$

则 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 是一列初等 RCS,且 $\forall\omega\in\Omega$,有 $\rho(X_n(\omega),X(\omega))\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$,从而 $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,X)=0$ 对 $\omega\in\Omega$ 一致成立. 反之,设 X 初等 RCS 列依 ρ 对 $\omega\in\Omega$ 的一致极限,由命题 1, X 是 RCS,证毕.

3　随机紧集的性质

性质 1　设 X 是 RCS,则 $\lambda X(\lambda\in R)$ 亦是 RCS, $\|X\|$ 是随机变量.

证明　由于 $X\to\lambda X, X\to\|X\|$ 显然都是 ρ 意义下的连续变换,因此,性质的结论都正确,证毕.

性质 2　设 X 是 RCS,则 $co\ X$ 是 RCCS.

证明　令 $H(A)=co\ A, A\in K$,则 H 是连续变换. 事实上,对 $\varepsilon>0$,有

$$\rho(A,B)<\varepsilon\Rightarrow A\subset B+\varepsilon S, B\subset A+\varepsilon S\Rightarrow$$
$$co\ A\subset co\ B+\varepsilon S, co\ B\subset co\ A+\varepsilon S\Rightarrow\rho(co\ A,co\ B)\leqslant\varepsilon$$

即 H 是连续变换. 因此, $H(X)=co\ X$ 是 RCCS,证毕.

性质 3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 RCS, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in R$,则 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_nX_n$ 是 RCS.

证明　令 $H(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_nX_n$,往证 $H(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是连续变换. 事实上,对 $\delta>0$,当 $\rho(X_i,Y_i)<\delta, i=1,2,\cdots,n$ 时,有 $X_i\subset Y_i+\delta S$ 和 $Y_i\subset X_i+\delta S, i=1,2,\cdots,n$.

由此,得: $\lambda_iX_i\subset\lambda_iY_i+\lambda_i\delta S$ 和 $\lambda_iY_i\subset\lambda_iX_i+\lambda_i\delta S, i=1,2,\cdots,n$,从而有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX_i\subset\sum_{i=1}^{n}\lambda_iY_i+(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\delta S\subset\sum_{i=1}^{n}\lambda_iY_i+(|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|+1)\delta S$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_iY_i\subset\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX_i+(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\delta S\subset\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX_i+(|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|+1)\delta S$$

因此,对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n|+1}>0$,当 $\rho(X_i,Y_i)<\delta, i=1,2,\cdots,n$ 时,有 $\rho(H(X_1,X_2,\cdots,X_n),H(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n))<\varepsilon$,证毕.

性质 4　设 $\{X_n\}$ 是一列相互独立的 RCS,则 $\{co\ X_n\}$ 是一列相互独立的 RCCS.

性质 5　设 $\{X_n\}$ 是一列相互独立的 RCCS,则 $\{X_n^*\}$ [2] 是一列相互独立的 $C^2(S)$—值随机变量.

证明　由独立性的定义,不难证明性质 4 和性质 5,证毕.

(下转第 14 页)