文章编号:1672 - 058X(2012)12 - 0001 - 05

Minty 向量似变分不等式的间隙函数的二阶可微性和灵敏性*

崔 蓉,刘学文
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要:间隙函数作为连接变分不等式与最优化问题的桥梁,逐渐成为变分不等式研究的热点之一. 利用 Φ - 相依锥和二阶 Φ - 相依集,讨论了 Minty 向量似变分不等式的间隙函数的二阶可微性和灵敏性.

关键词:Minty 向量似变分不等式;间隙函数;相依导数
中图分类号:O178 **文献标志码**:A

在论文《向量似变分不等式的间隙函数的可微性与灵敏性》中,讨论了 Minty 向量似变分不等式的一阶可微性,这里将讨论 Minty 的二阶可微性和灵敏性.

1 预备知识

假设 $L(R^n,R^m)$ 是从 R^n 到 R^m 的所有线性连续算子的集合,由于 R^n 是有限维空间,那么 $L(R^n,R^m)$ 也是有限维 Banach 空间.

定义 1[1] 称向量值函数 $F:K\to L(R^n,R^m)$ 在 x_0 处 Frechet 可微,如果存在一个线性连续算子 $\Psi:R^n\to L(R^n,R^m)$,使得:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\| F(x)-F(x_0)-\Psi(x-x_0)\|}{\| x-x_0\|}=0$$

则称 Ψ 为 F 在 x_0 处的导数,记为$\nabla F(x_0)$. 如果对任意的 $x\in K$,F 在 x 处都可微,则称 F 在 K 上 Frechet 可微.

定义 2[2,3] 设 C 是 R^n 中的非空子集,$\hat{x}\in \mathrm{cl}\ C$,令 $R_+=\{x\in R:x\geqslant 0\}$,则:

(1)称 $T(C,\hat{x})$ 为 C 在$\hat{x}$处的相依锥,如果对任意 $x\in T(C,\hat{x})$,存在序列$\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}:h_n\to 0$,$\{x_n\}\subset R^n:x_n\to x$,使得对任意的 n,$\hat{x}+h_nx_n\in C$.

(2)称 $T^{(2)}(C,\hat{x},\omega)$ 为 C 在$\hat{x}$处沿方向 $\omega\in R^n$ 的二阶相依集,如果对任意的 $x\in T^{(2)}(C,\hat{x},\omega)$,存在$\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}:h_n\to 0$,$\{x_n\}\subset R^n:x_n\to x$,使得对任意的 n,$\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n\in C$.

(3)称 $T^{b(2)}(C,\hat{x},\omega)$ 为 C 在$\hat{x}$处沿方向 $\omega\in R^n$ 的二阶邻接集,如果对任意的 $x\in T^{b(2)}(C,\hat{x},\omega)$,对任意的$\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}$,$h_n\to 0$,都存在$\{x_n\}\subset R^n:x_n\to x$,使得对任意 n 都有$\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n\in C$.

定义 3[4] 设 C 是 R^n 中的非空子集,$\hat{x}\in \mathrm{cl}\ C$,向量值函数 $\Phi:R^n\to R^m$,则:

收稿日期:2012 - 04 - 16;**修回日期**:2012 - 05 - 22.
* **基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11001289);重庆市教委科研资助项目(KJ100608).
作者简介:崔蓉(1989-),女,重庆开县人,硕士研究生,从事变分不等式理论与算法研究.

(1)称 $T_{\Phi}(C,\hat{x})$ 为 C 在 $\hat{x}$ 处的 Φ-相依锥,如果对任意 $y\in T_{\Phi}(C,\hat{x})$,存在序列 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}:h_n\to 0$, $\{x_n\}\subset C:x_n\to\hat{x}$,使得 $\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n}\to y$.

(2)称 $T_{\Phi}^{b}(C,\hat{x})$ 为 C 在 $\hat{x}$ 处的 Φ-邻接锥,如果对任意 $y\in T_{\Phi}^{b}(C,\hat{x})$,对任意序列 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}$, $h_n\to 0$,都存在 $\{x_n\}\subset C$,使得 $x_n\to x$,且 $\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n}\to y$.

(3)称 C 在 $\hat{x}$ 处 Φ-可微,如果 $T_{\Phi}^{b}(C,\hat{x})=T_{\Phi}(C,\hat{x})$.

(4)称 $T_{\Phi}^{(2)}(C,\hat{x},\omega)$ 为 C 在 $\hat{x}$ 处沿方向 $\omega\in T_{\Phi}(C,\hat{x})$ 的二阶 Φ-相依集,如果对任意的 $y\in T_{\Phi}^{(2)}(C,\hat{x},\omega)$,存在序列 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}:h_n\to 0$, $\{x_n\}\subset C:x_n\to\hat{x}$,使得 $\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n}\to\omega$ 且 $\dfrac{\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n}-\omega}{\dfrac{1}{2}h_n}\to y$.

定义 4[2] 称 graph G 为集值映射 $G:R^n\to 2^{R^m}$ 的图,如果

$$\text{graph } G=\{(x,y):y\in G(x)\}\subset R^n\times R^m$$

定义 5[2,3] 设 $(\hat{x},\hat{y})\in\text{graph } G$,集值映射 $DG(\hat{x},\hat{y}):R^n\to 2^{R^m}$ 定义如下:

$$\text{graph } DG(\hat{x},\hat{y})=T(\text{graph } G,(\hat{x},\hat{y}))$$

称 $DG(\hat{x},\hat{y})$ 为 G 在 $(\hat{x},\hat{y})$ 处的相依导数.

由定义2可知,对任意的 $y\in DG(\hat{x},\hat{y})(x)$,当且仅当存在序列 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}:h_n\to 0$, $\{(x_n,y_n)\}\subset R^n\times R^m:(x_n,y_n)\to(x,y)$,使得对任意的 n,有 $\hat{y}+h_ny_n\in G(\hat{x}+h_nx_n)$.

定义 6[5] 设 $S\subset R^m$ 是闭凸点锥,$A\subset R^m$,记 $\text{Max}_S A$ 和 $\text{Max}_{\text{int}S} A$ 分别为 A 的极大点和弱极大点的集合,其中

(1)对任意的 $a\in\text{Max}_S A$,当且仅当 $a\in A$,且不存在 $a^*\in A$,使得

$$a^*-a\in S\setminus\{0_{R^m}\}$$

(2)对任意的 $a\in\text{Max}_{\text{int }S}A$,当且仅当 $a\in A$,且不存在 $a^*\in A$,使得

$$a^*-a\in\text{int } S$$

2 (MVVLI)* 的间隙函数

设 S 是 R^m 中的闭凸点锥,且 int $S\neq\varnothing$,K 是 R^n 中任意给定的非空紧子集,$L(R^n,R^m)$ 是表示从 R^n 到 R^m 的所有线性连续算子的集合,映射 $F:R^n\to L(R^n,R^m)$,单值映射 $\eta:K\times K\to R^n$,向量似变分不等式问题(VVLI)就是:求 $x\in K$,使得对任意的 $y\in K$,有 $[F(x),\eta(x,y)]\notin -S\setminus\{0_{R^m}\}$. 弱向量似变分不等式问题(WVVLI),就是:求 $x\in K$,使得对任意的 $y\in K$,有 $[F(x),\eta(x,y)]\notin -\text{int } S$.

令 $\eta(x,y)=t(x)-t(y)$,其中 $t:K\to R^n$ 单值映射,且二阶连续可微. 则 Minty(VVLI)* 就是:求 $x\in K$,使得对任意的 $y\in K$,都有 $[F(y),t(x)-t(y)]\notin -S\setminus\{0_{R^m}\}$,Minty(WVVLI)* 就是:求 $x\in K$,使得对任意的 $y\in K$,都有 $[F(y),t(x)-t(y)]\notin -\text{int } S$.

接下来将讨论 Minty(VVLI)* 和 Minty(WVVLI)* 的间隙函数的可微性和灵敏性,这节中假设 $K\subseteq R^n$ 是紧集,$F:K\to L(R^n,R^m)$ 连续,$t:R^n\to R^n$ 连续可微,且

$$H(x)=\bigcup_{z\in K}[F(z),t(x)-t(z)]$$

设 $\hat{x}\in R^n$,$\hat{F}(\hat{x})=[F(x),t(\hat{x})-t(x)]$,若 $(\hat{x},\hat{y})\in\text{graph } H$,定义 K 的非空紧子集

$$\Omega(\hat{x},\hat{y})=\{x\in K:\hat{F}(x)=\hat{y}\}$$

定义 7　集值映射 $N:R^n \to 2^{R^m}$ 是 Minty 向量似变分不等式(MVVLI)* 的间隙函数，如果

(1) $0_{R^m} \in N(\hat{x})$ 当且仅当 $\hat{x}$ 是(MVVLI)* 的解.

(2) $N(x) \cap (-S) = \{0_{R^m}\}$.

定义 8　集值映射 $W:R^n \to 2^{R^m}$ 是 Minty 向量似变分不等式(MWVVLI)* 的间隙函数，如果

(1) $0_{R^m} \in W(\hat{x})$ 当且仅当 $\hat{x}$ 是(MWVVLI)* 的解.

(2) $W(x) \cap \operatorname{int} S = \varnothing$.

由定义 8 很容易证明下面的命题.

命题 1　设 S 是 R^m 中的闭凸点锥，且 $\operatorname{int} S \neq \varnothing$，有：

(1) 集值映射 $N:R^n \to 2^{R^m}$，$N(x):=\mathrm{Max}_S[F(K),t(K)-t(x)]$，$x\in K$，则 $N(x)$ 是(MVVLI)* 的间隙函数；

(2) 设集值映射 $W:R^n \to 2^{R^m}$，$W(x):=\mathrm{Max}_{\operatorname{int} S}[F(K),t(K)-t(x)]$，$x\in K$，则 $W(x)$ 是(MWVVLI)* 的间隙函数.

3　Minty 向量似变分不等式的间隙函数的二阶可微性和灵敏性

定理 1　设 $\hat{x}\in K$，$K\subset R^n$ 是紧集，$(\hat{u},\hat{v})\in T(\operatorname{graph} H,(\hat{x},\hat{y}))$，则对任意 $x\in \operatorname{Dom} DH(\hat{x},\hat{y})$，有

$$D^2H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x) = \bigcup_{x'\in\Omega(\hat{x},\hat{y})}[[F(x'),\nabla t(\hat{x})x'+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u},\hat{u})]+T_{\hat{F}}^{(2)}(K,x',w)]$$

其中 $\operatorname{Dom}(DH(\hat{x},\hat{y}))=\{x\in R^n:DG(\hat{x},\hat{y})(x)\neq\varnothing\}$.

证明　设 $y\in D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，则存在序列 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}$，$h_n\to 0$，$\{(x_n,y_n)\}\subset R^n\times R^m$，$(x_n,y_n)\to(x,y)$，使得

$$\hat{y}+h_n\hat{v}+\frac{1}{2}h_ny_n \in H(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_nx_n) = [F(K),t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)-t(K)]$$

则存在 $\hat{x}_n\in K$，使得

$$\hat{y}+h_n\hat{v}+\frac{1}{2}h_ny_n = [F(\hat{x}_n),t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)-t(\hat{x}_n)] \tag{1}$$

由 t 二阶连续可微，故

$$t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n) = t(\hat{x})+h_n\nabla t(\hat{x})\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n,\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)+$$
$$o(\|h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n\|_2)^2 \tag{2}$$

由 $K\subseteq R^n$ 紧，不妨设 $\hat{x}_n\to x'\in K$，则由式(1)得

$$\hat{y} = [F(x'),t(\hat{x})-t(x')] \tag{3}$$

即 $\hat{y}=\hat{F}(\hat{x})$，故 $x'\in\Omega(\hat{x},\hat{y})$.

$$[F(\hat{x}_n),t(\hat{x})-t(\hat{x}_n)] = [F(\hat{x}_n),t(\hat{x})-t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)]+$$
$$[F(\hat{x}_n),t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)-t(\hat{x}_n)] =$$
$$-[F(\hat{x}_n),h_n\nabla t(\hat{x})\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2\nabla t(\hat{x})x_n+$$
$$\frac{1}{2}h_n^2\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n,\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)+o(\|h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n\|_2)^2]+$$
$$[F(x'),t(\hat{x})-t(x')]+h_n\hat{v}+\frac{1}{2}h_n^2y_n \tag{4}$$

由式(1)(2)(3)(4)可得

$$\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')=[F(\hat{x}_n),t(\hat{x})-t(\hat{x}_n)]-[F(x'),t(\hat{x})-t(x')]=$$
$$-[F(\hat{x}_n),h_n\nabla t(\hat{x})\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2\nabla t(\hat{x})x_n+\frac{1}{2}h_n^2\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n,\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)+$$
$$o(\|h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n\|_2)^2]+h_n\hat{v}+\frac{1}{2}h_n^2y_n \tag{5}$$

在式(5)两边同除 h_n,并取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')}{h_n}=-[F(x'),\nabla t(\hat{x})\hat{u}]+v \tag{6}$$

令 $w=-[F(x'),\nabla t(\hat{x})\hat{u}]+v$,由式(5)(6)得

$$\frac{\frac{\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')}{h_n}-w}{\frac{1}{2}h_n}=$$
$$-\left[F(\hat{x}_n),h_n\frac{\nabla t(\hat{x})\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2\nabla t(\hat{x})x_n+\frac{1}{2}h_n^2\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n,\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)+o(h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_{n_2})^2}{\frac{1}{2}h_n^2}\right]+$$
$$\frac{2\hat{v}}{h_n}+y_n\to-[F(x'),\nabla t(\hat{x})x_n+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u},\hat{u})]+y$$

所以,$y\in\bigcup_{x'\in\Omega(\hat{x},\hat{y})}\{[F(x'),\nabla t(\hat{x})x'+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u},\hat{u})]+T_F^{(2)}(K,x',w)\}$. 反之,设 $y=[F(x'),\nabla t(\hat{x})x'+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u},\hat{u})]+z^*$ 其中,$z^*\in T_F^{(2)}(K,x',w)$,则存在 $\{h_n\}\subset R_+\setminus\{0\}$,$\{\hat{x}_n\}\subset K$,使得 $h_n\to 0$,$\hat{x}_n\to x'$,$\frac{\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')}{h_n}\to w$,$\frac{\frac{\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')}{h_n}-w}{\frac{1}{2}h_n}\to z^*$.

由 t 二次连续可微,取序列 $\{x_n\}\{y_n\}$,使得 $x_n\to x'$,有:

$$y_n=[F(x'),\nabla t(\hat{x})x_n+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n,\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)]+\frac{\frac{\hat{F}(\hat{x}_n)-\hat{F}(x')}{h_n}-w}{\frac{1}{2}h_n}$$

则 $y_n\to y$,且

$$\hat{y}+h_n[F(x_n),w-\frac{1}{2}h_n\nabla t(\hat{x})x_n+\nabla t(\hat{x})\hat{u}]+\frac{1}{2}h_n^2y_n=$$
$$(F(x_n),t(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n)-t(x_n))\in H(\hat{x}+h_n\hat{u}+\frac{1}{2}h_n^2x_n) \tag{7}$$

由式(7)可知 $\hat{v}=[F(x_n),w-\frac{1}{2}h_n\nabla t(\hat{x})x_n+\nabla t(\hat{x})\hat{u}]$,故 $y\in D^2H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$,所以

$$D^2H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)=\bigcup_{x'\in\Omega(\hat{x},\hat{y})}\{[F(x'),\nabla t(\hat{x})x'+\nabla^2 t(\hat{x})(\hat{u},\hat{u})]+T_F^{(2)}(K,x',w)\}$$

定理 2 设 $K\subset R^n$ 是紧集,$\hat{x}\in K$,$\hat{y}\in H(\hat{x})$,$(\hat{u},\hat{v})\in T(\mathrm{graph}\ H,(\hat{x},\hat{y}))$,若 $D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)=D^{b(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$,则对任意 $x\in\mathrm{Dom}(D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v}))$,有 $D^{(2)}W(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)\subseteq\mathrm{Max}_{\mathrm{int}S}D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$.

证明　任取 $y \in D^{(2)}W(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，显然有 $y \in D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$.

若 $y \notin \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,S}D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，则 $\exists\, \hat{y} \in D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，使得：

$$\hat{y} - y \in \mathrm{int}\, S \tag{8}$$

$y \in D^{(2)}W(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，则 $\exists \{h_n\} \subset R_+ \setminus \{0\}, h_n \to 0, \{(x_n, y_n)\} \subset R^n \times R^m : (x_n, y_n) \to (x, y)$，使得对任意 n，有：

$$\hat{y} + h_n \hat{v} + \frac{1}{2}h_n^2 y_n \in W(\hat{x} + h_n \hat{u} + \frac{1}{2}h_n^2 x_n)$$

$\hat{y} \in D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x) = D^{b(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$，则对上述 $\{h_n\} \subset R_+ \setminus \{0\}, h_n \to 0, \exists \{(\hat{x}_n, \hat{y}_n)\} \subset R^n \times R^m$：$(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \to (\hat{x}, \hat{y})$，使得对任意 n，有

$$\hat{y} + h_n \hat{v} + \frac{1}{2}h_n^2 \hat{y}_n \in H(\hat{x} + h_n \hat{u} + \frac{1}{2}h_n^2 \hat{x}_n)$$

由 $\hat{y} + h_n \hat{v} + \frac{1}{2}h_n^2 y_n \in W(\hat{x} + h_n \hat{u} + \frac{1}{2}h_n^2 x_n)$ 和 W 的定义，有

$$\hat{y} + h_n \hat{v} + \frac{1}{2}h_n^2 \hat{y}_n - (\hat{y} + h_n \hat{v} + \frac{1}{2}h_n^2 y_n) \notin \mathrm{int}\, S$$

即 $\hat{y}_n - y_n \notin \mathrm{int}\, S$，所以 $\hat{y} - y \notin \mathrm{int}\, S$，与式(8)矛盾，故 $y \in \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,S}D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$. 所以 $D^{(2)}W(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x) \subseteq \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,S}D^{(2)}H(\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{v})(x)$.

参考文献：

[1] 游兆永，龚怀玉，徐宗本. 非线性分析[M]. 西安：西安交通大学出版社，1991

[2] ABUIN J P, FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis[M]. Boston Birhauser, 1990

[3] KALASHNIKOV V, JADAMBA B, KHAN A A. First and second-order optimization conditions in set optimization[A]. In: Dempe, S Kalashnikov, V (eds.) Optimization with Multivalued appings[C]. Berlin: Springer, 2006

[4] MENG K W, LI S J. Differential and sensitivity properties of gap functions for Minty vector variational inequalities [J]. Math Anal Appl, 2008, 337: 86-398

[5] LI S J, YAN H, CHEN G Y. Differential and sensitivity properties of gap functions for vector variational inequalities[J]. Math Methods Oper Res, 2003, 57: 377-391

Second-order Differential and Sensitivity Properties of Gap Function of Minty Vector Variational-like Inequalities

CUI Rong, LIU Xue-wen

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Gap function as a bridge between variational inequalities and optimization problems gradually becomes one of hot topics in variational inequality research. Through ϕ-contingent cone and second-order ϕ-contingent set, this paper discusses second-order differential and sensitivity properties of gap function of Minty vector variational-like inequalities

Key words: Minty vector variational-like inequalities; gap function; contingent derivative

责任编辑：李翠薇