文章编号:1672 - 058X(2012)11 - 0027 - 04

带壁分红策略下对偶模型的破产概率*

付 燕

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘　要:研究了对偶模型在带壁分红策略下的破产问题,给出了相应的期望折现罚金函数所满足的积分方程与积分微分方程;当收益额服从指数分布时,得到了破产概率的显示解.

关键词:破产概率;带壁分红;期望折现罚金函数;积分方程;积分微分方程

中图分类号:0211.6　　　　**文献标志码**:A

0　引　言

在经典连续时间复合 Poisson 风险模型中,保险公司在 t 时刻的盈余为

$$U(t) = u + ct - S(t), t \geqslant 0 \tag{1}$$

其中,u 是初始盈余,c 是保险公司单位时间征收的保险费,$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ 表示到 t 时刻的索赔总额,$N(t)$ 表示$[0,t]$ 内发生的索赔次数,$X_n(n \geqslant 1)$ 表示第 n 次索赔额.

考虑 $U(t)$ 的对偶过程,即在时刻 t 盈余为

$$U(t) = u - ct + S(t), t \geqslant 0 \tag{2}$$

其中,u 是初始盈余;c 是公司单位时间的支出费用,例如保险公司的寿险年金率或房地产公司、石油公司等日常经济业务中的年费用率;$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ 为到 t 时刻公司的收益总额,也可理解为知识产权收益,红利等;$N(t)$ 表示$[0,t]$ 内发生的收入次数,$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是参数为 λ 的 Poisson 计数过程;$Y_n(n \geqslant 1)$ 表示第 n 次收益额,$\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一列独立同分布的非负随机变量,有共同分布 $F(y)$,密度函数为 $f(y)$,其中 $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ 与 $Y_n(n \geqslant 1)$ 独立.

De Finetti[1] 首次提出在经典风险模型(1)中考虑两种分红策略,即带壁分红策略和阈值分红策略,许多文献在其破产问题及分红问题上得到了一些结论[2-5]. 随着金融、公司业务和保险业务的发展,经典风险模型的对偶模型越来越受到重视,一些文献对模型(2)的问题进行了研究[6-7]. Avanzi 等[6] 利用积分微分方程的方法研究了基于对偶模型在常值分红策略下,公司在破产时的累积红利期望现值,并给出了当收益服从指数分布时其显示表达式.

此处主要研究了基于对偶模型下的 Gerber-Shiu 期望折现罚金函数,得到了其满足的积分方程与积分微分方程,并给出了带壁分红下对偶模型的破产概率,最后给出了当 $F(y)$ 服从指数分布时,破产概率的具体表达式,为公司提供有价值的参考指标.

收稿日期:2012 - 04 - 08;**修回日期**:2012 - 04 - 21.

* **基金项目**:重庆市科委自然科学基金(CSTC2010BB9218).

作者简介:付燕(1987-),女,湖北安陆人,硕士研究生,从事金融数学研究.

以常值 b 为分红界限,当盈余超过 b 时,将超过的部分全部分红;当盈余没有达到 b 时,则不发生分红,如图 1 所示.

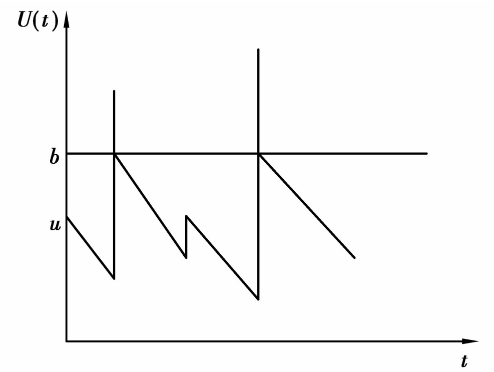

图 1 带壁策略下盈余和分红

1 积分方程与积分微分方程

公司资产低于零的概率称为破产概率,在模型(2)中定义破产时刻 $T:=\inf\{t\geqslant 0, U(t)=0\}$,破产概率 $\psi_b(u):=P(T<\infty \mid U(0)=u)$. 根据对偶模型下公司破产时刻 T 的定义可知,公司在破产前的瞬时盈余及破产时刻的赤字皆为 0,即 $U(T-)=0$, $|U(T)|=0$. 于是,对偶模型下的 Gerber-Shiu 期望折现罚金函数为

$$m_b(u):=\omega(0,0)E[\mathrm{e}^{-\delta T}I(T<\infty)\mid U(0)=u]$$

其中,$\delta\geqslant 0$ 为折现利息率,$I(A)$是关于事件 A 的示性函数,ω 是定义在$[0,\infty)\times(0,\infty)$上的非负可测函数.

不失一般性,假设 $\omega(0,0)=1$,对于任意 $\delta>0$,得

$$m_b(u):=E[\mathrm{e}^{-\delta T}I(T<\infty)\mid U(0)=u]$$

定理 1 令 $0\leqslant u\leqslant b$,则 $m_b(u)$满足下列积分方程:

$$m_b(u)=\int_0^{\frac{u}{c}}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{b-u+ct}m_b(u-ct+y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{u}{c}}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\int_{b-u+ct}^{\infty}m_b(b)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}t \tag{3}$$

证明 根据函数 $m_b(u):=E[\mathrm{e}^{-\delta T}I(T<\infty)\mid U(0)=u]$,考虑$\left(0,\frac{u}{c}\right)$时间内,收益发生条件下,没有达到常值 b 以及达到常值 b 的情况,便可得到式(3)右端第一项和第二项.

注 1 若在$\left(0,\frac{u}{c}\right)$时间内没有发生收益,则在 $t=\frac{u}{c}$处发生破产.

定理 2 假设 $F(y)$具有定义在$[0,\infty)$上的连续密度函数,则 $m_b(u)$是二次连续可导的.

证明 证明类似于文献[8]中的定理 2. 2.

定理 3 当初始盈余 $u\geqslant 0$ 在不同门限水平时,假设 $F(y)$具有$[0,\infty)$上连续的密度函数,则 $m_b(u)$满足如下积分微分方程:

$$m'_b(u)=\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{b-u}m_b(u+y)\mathrm{d}F(y)+\int_{b-u}^{\infty}m_b(b)\mathrm{d}F(y)\right]-\frac{\lambda+\delta}{\lambda}m_b(u)\ ,0\leqslant u\leqslant b$$

$$m'_b(u)=-\frac{\delta}{c}m_b(b)\ ,u>b$$

其中,边界条件为 $m'_b(b)=-\frac{\delta}{c}m_b(b)$.

证明 i)考虑当初始盈余 $0\leqslant u\leqslant b$ 时,由定理 1 可得

$$m_b(u)=\int_0^{\frac{u}{c}}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{b-u+ct}m_b(u-ct+y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{u}{c}}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\int_{b-u+ct}^{\infty}m_b(b)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}t \tag{4}$$

可以将式(4)转换为

$$m_b(u)=\frac{1}{c}\int_0^{u}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)\cdot\frac{u-t}{c}}\int_0^{b-t}m_b(t+y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{c}\int_0^u \lambda e^{-(\lambda+\delta)\cdot\frac{u-t}{c}}\int_{b-t}^{\infty} m_b(b)\,dF(y)\,dt \tag{5}$$

将式(5)两边同时对 u 求导,得到

$$\begin{aligned} m'_b(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^{b-u} m_b(u+y)\,dF(y) + \frac{\lambda}{c}\int_{b-u}^{\infty} m_b(b)\,dF(y) - \\ &\frac{\lambda+\delta}{c}\frac{1}{c}\Big[\int_0^u \lambda e^{-(\lambda+\delta)\cdot\frac{u-t}{c}}\int_0^{b-t} m_b(t+y)\,dF(y)\,dt + \\ &\int_0^u \lambda e^{-(\lambda+\delta)\cdot\frac{u-t}{c}}\int_{b-t}^{\infty} m_b(b)\,dF(y)\,dt\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

把式(5)代入式(6)中可得

$$m'_b(u) = \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^{b-u} m_b(u+y)\,dF(y) + \int_{b-u}^{\infty} m_b(b)\,dF(y)\Big] - \frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u) \tag{7}$$

当 $u=b$ 时,可以得到边界条件

$$m'_b(b) = -\frac{\delta}{c}m_b(b) \tag{8}$$

ii)再考虑初始盈余 $u>b$ 时,将多于 b 的部分全部分红,即

$$m'_b(u) = -\frac{\delta}{c}m_b(b) \tag{9}$$

注 2　当 $\delta=0$ 时,$m_b(u)$是对偶模型在带壁分红策略下的破产概率.

注 3　当 $\delta>0$ 时,$m_b(u)$是对偶模型在带壁分红策略下破产时刻 T 的拉普拉斯变换.

注 4　当 $b=0,\delta=0$ 时,即得到文献[9]中引理 1.

2　举　例

考虑定理 3 的积分微分方程,当收益额 Y_n 服从指数分布 $F(y)=1-e^{-\alpha y}(y\geqslant 0,\alpha>0)$时,得到 $m_b(u)$以及破产概率的显示解.

于是,将 $F(y)$代入式(7)可得

$$m'_b(u) = \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^{b-u}\alpha m_b(u+y)e^{-\alpha y}dy + \int_{b-u}^{\infty}\alpha m_b(b)e^{-\alpha y}dy\Big] - \frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u) \tag{10}$$

对式(10)右端通过变量替换得

$$m'_b(u) = \frac{\lambda}{c}\Big[\int_u^b \alpha m_b(y)e^{-\alpha(y-u)}dy + \int_{b-u}^{\infty}\alpha m_b(b)e^{-\alpha y}dy\Big] - \frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u) \tag{11}$$

式(11)两边同时对 u 求导,得

$$m''_b(u) = \frac{\lambda}{c}\Big[-\alpha m_b(u) + \int_u^b \alpha^2 m_b(y)e^{-\alpha(y-u)}dy + \alpha m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\Big] - \frac{\lambda+\delta}{c}m_b'(u) \tag{12}$$

两边再对 u 求导,得

$$\begin{aligned} m'''_b(u) &= \frac{\lambda}{c}\Big[-\alpha m_b'(u) + \alpha\Big(-\alpha m_b(u) + \int_u^b \alpha^2 m_b(y)e^{-\alpha(y-u)}dy\Big) + \\ &\alpha^2 m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\Big] - \frac{\lambda+\delta}{c}m_b''(u) \end{aligned} \tag{13}$$

联立式(12)和式(13)可得

$$m'''_b(u) - \Big(\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c}\Big)m''_b(u) - \frac{\alpha\delta}{c}m'_b(u) = 0 \tag{14}$$

设 ρ_1,ρ_2,ρ_3 是特征方程 $s^3-\left(\alpha-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)s^2-\frac{\alpha\delta}{c}s=0$ 的 3 个实数根,则有

$$m_b(u) = C_1 e^{\rho_1} + C_2 e^{\rho_3} + C_3 e^{\rho_3} (C_1, C_2, C_3 \text{ 是任意实数})$$

这就是 $m_b(u)$ 的显示解.

下面推导破产概率的显示解. 由 $m_b(u) := E[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u]$ 及注 3,可以得到 $\psi_b(u) = E[I(T < \infty) \mid U(0) = u]$. 故由式(7)可得破产概率 $\psi_b(u)$ 的积分微分表达式为

$$\psi'_b(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{b-u} \psi_b(u+y)\,\mathrm{d}F(y) + \int_{b-u}^{\infty} \psi_b(b)\,\mathrm{d}F(y)\right] - \psi_b(u) \tag{15}$$

将 $F(y) = 1 - e^{-\alpha y}$ 代入式(15),两端同时对 u 求导可得

$$\psi'''_b(u) - \left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)\psi''_b(u) = 0 \tag{16}$$

解得

$$\psi_b(u) = A_1 \exp\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u + A_2 u + A_3$$

其中,A_1, A_2, A_3 是任意常数.

参考文献:

[1] DE FINETTI B. Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio [A]. In: Proceedings of the Transactions of the XV International Congress of Actuaries [C]. 1957(2):433-443

[2] DAVID C M, DICKSON. Insurance Risk and Ruin [M]. Cambridge University Press, 2005

[3] LIN X S, WILLMOT G E, DREKIC S. The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(3): 551-566

[4] GERBER H U, SHIU E S W. On the time value of ruin [J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2(1): 48-72

[5] 彭之光. 随机收入下的对偶风险模型[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2010, 28(2):150-153

[6] AVANZI B, GERBER H U, SHIU E S W. Optimal dividend in the dual model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 41(1): 111-123

[7] GERBER H U, SMITH N. Optimal dividends with incomplete information in the dual model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43(2): 227-233

[8] WANG G J, WU R. Some Distributions for Classical Risk Process that is Perturbed by Diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 26: 15-24

[9] 胡平玮,黎锁平. 负风险模型及其推广模型基本性质和应用[J]. 兰州理工大学学报, 2010, 36(1): 158-161

The Probability in Ruin with Barrier Dividend in the Dual Model

FU Yan

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper investigates the ruin problem in the dual model with a constant dividend barrier. The integral and integral-differential equations for expected discounted penalty function until ruin are derived. The probability in ruin with barrier dividend in the dual model is solved when the individual profit size distribution is exponential.

Key words: ruin probability; barrier dividend; expected discounted penalty function; integral equation; integral-differential equation

责任编辑:李翠薇