文章编号:1672－058X(2012)10－0049－07

随机收益流的效用无差别定价*

罗 琰[1], 覃展辉[2]

(1. 南京审计学院 数学与统计学院;2. 管理学院,江苏 南京 210075)

摘 要: 研究一类随机收益流效用无差别定价问题;在指数效用函数假设下,通过求解 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellmen)方程,得到了随机收益流效用价格的显示解;结果显示,随机收益流的效用价格随自身平均回报率的增加而上升,随投资者风险厌恶程度的提高而降低,这与人们的直观是一致的。

关键词: 随机收益流;效用无差别定价;Hamilton-Jacobi-Bellmen 方程.

中图分类号: O142 **文献标志码:** A

经典资产定价问题数量化研究可以追溯到 Markowitz 的投资组合理论。关于原生资产的定价问题中,最经典也是最有影响力的当属 Sharpe、Lintner 及 Mossin (1966)提出的资本资产定价理论(Capital Asset Pricing Model 简称 CAPM)以及 Rose 提出的套利定价理论(Arbitrage Pricing Theory 简称 APT)。关于衍生资产定价问题当然是 1973 年,Black & Scholes 和 Merton 提出的期权定价理论。近几十年来,资产定价问题一直是学者研究的热点之一,其中比较经典的基本论著有 Duffie 教授的《动态资产定价理论》,Cochrance 教授的《资产定价》,还有 Björk 教授的《连续时间套利理论》。可以说在完备市场中基于无套利原理的衍生产品定价问题已经得到了完美的解决,现今关于投资决策及资产定价问题的研究主要集中在难度更大、更具有实际意义的非完备市场[1-3]。但是非完备市场不再具有完备市场的“完全复制”功能,不存在唯一的无套利价格,至今没有一个公认最好的定价原理。可喜的是由 Hodges&Neuberger(1989)[4]提出的效用无差别定价原理具有明显的经济学依据,已引起了众多学者及业界人士的普遍重视。效用无差别定价定价方法简单的说就是比较持有和不持有某个未定权益之间的最大化期望效用,从而得到此未定权益的价格。如 Musiela&Zariphopoulou (2004)[5]运用效用无差别定价原理给出了标的资产不可交易欧式期权价格的基于熵鞅测度的期望表达形式,Henderson (2002)[6]在不完备市场条件下研究了实物期权的估值,发现投资者的风险厌恶及市场的特质风险(Idiosyncratic Risk)会侵蚀实物期权价值并降低投资门限,Miao&Wang (2007)[7]运用效用无差别定价原理研究了不完备市场情形的投资、消费及对冲问题,给出了实物期权价格所满足的二阶偏微分方程方程,Ewald&Yang (2008) [8]研究了标的资产价格为几何均值回复过程时的实物期权效用无差别价格,易昊,杨招军(2009)[9]研究了标的资产为均值回复过程的实物期权消费效用无差别定价问题,罗琰等(2011)[10]研究了非完备市场欧式期权的效应无差别定价问题。上述文献有个共同的特点就是都是研究衍生的金融期权或者实物期权的定价问题。

现不研究衍生资产定价问题,而讨论一种原生资产定价问题。这类资产包括能为投资者未来带来不确

收稿日期:2012－03－10;修回日期:2012－03－27.

* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(70971037).

作者简介:罗琰(1979-),男,湖南郴州人,博士,讲师,从事金融数学理论研究.

定收益流的任何形式的实物资产。这里的资产不同于股票等有价证券,不可以在二级市场上交易。比如是一个水利发电建设项目可以为投资者带来未来不确定性随机收益,或者投资者向保险公司购买一项随机年金,能从保险公司得到未来不确定收益等。为获得这种收益流现在要支付的金额就是这种资产的价格。若同时考虑何时投资,即同时考虑择时以及定价问题,则这这类问题类似于非完备市场中经典实物期权问题。然而在已有文献中,非完备市场的实物期权定价一般都很难得到效用价格的闭式解。虽然放弃考虑择时问题,仅考虑此种资产的定价和风险对冲问题,但却能获得效用价格的显式解。因为这类资产能带来不确定收益流,不妨直接称这类资产为“随机收益流”。

通常解决连续时间投资决策及资产定价问题历来有两种方法,即随机控制方法[11-13]与鞅方法[14]。鉴于在市场不完备的条件下,鞅方法不如随机控制方法有效,运用经典的随机最优控制方法研究随机收益流的定价问题。

1 完备市场情形的最优投资

效用无差别定价机制是基于比较持有和不持有风险资产的最大化期望效用之间的差别。因此,首先考虑没有随机收益流时的完备市场下经典的最优投资组合模型,给出最大化终止时刻财富期望指数效用的最优投资策略及最优值函数的显式解。这个模型最初由 Merton(1969)[15]年提出,并吸引了众多学者及业界人士的兴趣,对这个基本模型进行拓展,使之更贴近实际。

设金融市场中仅存在一种风险资产(股票)和一种无风险资产(存款),风险资产在时刻 t 价格 $S(t)$ 服从几何布朗运动:

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) = s \tag{1}$$

无风险资产在 t 时刻的价格 $S_0(t)$ 服从如下方程:

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, S_0(0) = 1 \tag{2}$$

其中 $r,\mu,\sigma>0$ 为常量,μ 表示风险资产的收益率,σ 表示风险资产波动率,r 表示无风险资产收益率且有$0<r<\mu$;$\{W(t):t\geqslant 0\}$ 为定义在概率空间(W,F,P)上 F_t 适应的标准 Brown 运动,这里 F_t 是 $\sigma-$域 $F_t^W=\sigma\{W(s);0\leqslant s\leqslant t\}$ 关于 P 的完备化。则投资者在时刻 t 的财富总额 $X(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$dX(t) = [rX(t) + \pi(t)(\mu - r)]dt + \pi(t)\sigma dW(t), X(0) = x \tag{3}$$

其中,x 为投资者初始财富,$\pi(t)$ 为 t 时刻投资在风险资产上的财富,若$\{\pi(t),t\geqslant 0\}$是 F_t 循序可测集,并满足可积条件 $\int_0^T \pi_t^2 dt < +\infty$,则 $\pi(t)$ 是可行策略,记 Π 为所有可行策略集,于是投资者最大化终止时刻财富期望效用投资问题即为寻找可行投资策略 $\pi^* \in \Pi$ 及价值函数 $V(x,t)$ 使得:

$$V(x,t) = \sup_{\{\pi(t)\}\in\Pi} E[u(x_T) \mid X(t) = x] \tag{4}$$

由随机最优控制理论容易得值函数满足如下 HJB 方程:

$$\begin{cases} V_t + \max\limits_{\pi}[(\mu - x)\pi V_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 V_{xx}] + rxV_x = 0 \\ V(x,T) = u(x). \end{cases} \tag{5}$$

由一阶条件,最优投资策略有如下形式:

$$\pi^*(x,t) = -\frac{(\mu - r)}{\sigma^2}\frac{V_x(x,t)}{V_{xx}(x,t)} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)并整理得:

$$\begin{cases} V_t + rxV_x - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\dfrac{V_x^2}{V_{xx}} = 0 \\ V(x,T) = u(x) \end{cases} \tag{7}$$

若效用函数具有双曲绝对风险厌恶(HARA)形式,则满足式(7)的值函数都具有显示解。但是,投资者持有有随机收益流时,相应的最大化终止时刻期望效用的值函数难以求得显示解。所以,为求解第四节风险资产的效用无差别价格的显示解,只给出指数效用函数情形的解。

定理 1　若投资者具有指数效用函数 $u(x) = -e^{-\gamma x}/\gamma, \gamma > 0$,则投资者的最优值函数及最优投资策略分别为:

$$V(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}(T - t)\right) \tag{8}$$

$$\pi^*(x,t) = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2}\frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma} \tag{9}$$

证明　在 Merton(1969)[14] 文献中,令指数效用函数形式为 $u(x) = -e^{-\gamma x}/\gamma, \gamma > 0$,即可得到式(8)、(9)。

2　具有随机收益流情形的最优投资

设投资者不仅可以投资上节所述的无风险资产和风险资产(股票)外,还可以投资一种可获取随机收益流的风险资产。先建立包含随机收益流的最优投资模型,求出最大化终止时刻财富期望效用对应的最优值函数及最优投资策略的显示解,下一节导出随机收益流的效用无差别价格。

设投资者购买了满足如下随机微分方程的收益流[8]:

$$\mathrm{d}Y(t) = \alpha \mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}B(t), Y(0) = y \tag{10}$$

其中 $\alpha,\beta > 0$ 为常量,α 表示收益流的平均回报率,β 表示收益流的波动率,$\{B(t): t \geqslant 0\}$ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上 F_t 适应的另一标准 Brown 运动,此时设定 F_t 是自然 σ - 域 $F_t\{F_t^{W,B}\}$ 关于概率测度 P 的完备化。设过程 $\{B(t): t \geqslant 0\}$ 及 $\{W(t): t \geqslant 0\}$ 相关,相关系数为 $\rho(\neq \pm 1)$,即 $E[B(t)W(t)] = \rho t$,市场是不完备的。要说明的是,此处随机收益流 $Y(t)$ 为具有常系数的算术布朗运动是为了获得效用价格的显示解,而且算术布朗运动意味着收益可以取正值,也可取负值,正值表示有真实的收益,而取负值时意味着亏损的。但是,如果参数 α、β 依赖于财富过程或 $Y(t)$ 本身则随机收益流的效用无差别价格不能获得显示解,当然 α、β 为时间的确定性函数同样可获得显示解。

市场其他条件同上,设在时刻 t 投资者还购买了随机收益流 $Y(t)$,则投资者在时刻 t 的财富总额 $X(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= [rX(t) + \pi(t)(\mu - r)]\mathrm{d}t + \pi(t)\sigma \mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}Y(t) = \\ &[rX(t) + \pi(t)(\mu - r) + \alpha]\mathrm{d}t + \pi(t)\sigma \mathrm{d}W(t) + \beta \mathrm{d}B(t) \end{aligned} \tag{11}$$

此时,投资者最大化终止时刻财富期望效用的投资问题即为寻找可行投资策略 $\pi^* \in \Pi_y$ 及价值函数 $U(x,t)$ 使得:

$$U(x,t) = \sup_{\{\pi_t\} \in \Pi_y} E[u(X(T)) \mid X(t) = x] \tag{12}$$

此处要说明的是价值函数用 $U(x,t)$ 表示以示与第二节完备市场情形价值函数 $V(x,t)$ 的区别。此外,

价值函数 $U(x,t)$ 只依赖财富过程与时间参数 t,与不可交易风险资产 $Y(t)$ 无直接关系,$Y(t)$ 对价值函数的作用已被吸收到财富过程中,否则价值函数应当写为三元表达式 $U(x,y,t)$。由随机最优控制理论容易得此时值函数 $U(x,t)$ 满足如下 HJB 方程:

$$\begin{cases} U_t + \max\limits_{\pi\in\Pi_y}[(\mu-r)\pi U_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 U_{xx} + \rho\beta\sigma\pi U_{xx}] + (rx+\alpha)U_x + \frac{1}{2}\beta^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,T) = u(x). \end{cases} \tag{13}$$

由一阶条件可得投资者的最优投资策略为:

$$\pi^*(x,t) = -\frac{(\mu-r)}{\sigma^2}\frac{U_x(x,t)}{U_{xx}(x,t)} - \frac{\rho\beta}{\sigma} \tag{14}$$

将式(14)代入式(13)并整理得:

$$\begin{cases} U_t + [rx+\alpha-\frac{\rho\beta}{\sigma}(\mu-r)]U_x - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\frac{U_x^2}{U_{xx}} + \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho^2)U_{xx} = 0, \\ U(x,T) = u(x). \end{cases} \tag{15}$$

通常,对于一般的 HARA(双曲绝对风险厌恶函数)效用函数,求解价值函数 $U(x,t)$ 满足的式(12)并非易事,幸运的是若投资者具有指数效用函数 $u(x) = -e^{-\gamma x}/\gamma,\gamma>0$,则价值函数 $U(x,t)$ 可得显示解,此时有如下定理:

定理2 若投资者持有随机收益流资产,则最大化终止时刻财富期望效用的最优值函数及最优投资策略分别为:

$$U(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t) + h(t)\right) \tag{16}$$

$$\pi^*(x,t) = \frac{(\mu-r)}{\sigma^2}\frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma} - \frac{\rho\beta}{\sigma} \tag{17}$$

其中:

$$h(t) = \gamma\left[\frac{\rho\beta(\mu-r)}{\sigma} - \alpha\right]\left[\frac{e^{r(T-t)}-1}{r}\right] + \frac{1}{2}\gamma^2\beta^2\left[\frac{e^{2r(T-t)}-1}{2r}\right](1-\rho^2) \tag{18}$$

证明 由第二节可知,若 $\alpha=\beta=0$,即投资者不持有随机收益流资产时,最优值函数为表达式为 $V(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)\right)$。所以,不妨尝试式(15)的解具有如下形式:

$$V(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t) + h(t)\right) = V(x,t)e^{h(t)}$$

容易验证有如下式子成立:

$$U_t = V_t e^{h(t)} + Ve^{h(t)}\cdot h'(t), U_x = e^{h(t)}V_x, U_{xx} = e^{h(t)}V_{xx} \tag{19}$$

将式(19)代入式(15)可得:

$$\begin{cases} V_t + Vh'(t) + \left[rx+\alpha-\frac{\rho\beta}{\sigma}(\mu-r)\right]V_x - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} + \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho^2)V_{xx} \\ U(x,T) = u(x) \end{cases} \tag{20}$$

将式(7)代入(20)并整理可得:

$$\begin{cases} Vh'(t) = -\left[\alpha-\frac{\rho\beta}{\sigma}(\mu-r)\right]V_x - \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho^2)V_{xx} \\ U(x,T) = u(x) \end{cases} \tag{21}$$

由式(8)可知:

$$V_t = V\left[\gamma x r e^{r(T-t)} + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\right], V_x = V[-\gamma e^{r(T-t)}], V_{xx} = V[\gamma^2 e^{2r(T-t)}(1-\rho^2)] \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)可得 $h(t)$ 满足如下常微分方程:

$$\begin{cases} h'(t) = \gamma e^{r(T-t)}\left[\alpha - \dfrac{\rho\beta(\mu - r)}{\sigma}\right] - \dfrac{1}{2}\gamma^2\beta^2 e^{2r(T-t)}(1-\rho^2) \\ h(T) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

求解式(23)即可得:

$$h(t) = -\gamma\left[\alpha - \frac{\rho\beta(\mu - r)}{\sigma}\right]\left[\frac{e^{r(T-t)} - 1}{r}\right] + \frac{1}{2}\gamma^2\beta^2\left[\frac{e^{2r(T-t)} - 1}{2r}\right](1-\rho^2)$$

即为式(18),即得值函数式(16),将式(16)代入式(14)即得最优投资策略式(17)。证毕。

3　随机收益流的效用无差别定价

上面给出了投资者持有随机收益流资产时的最优投资模型,进一步导出持有这种随机收益率流资产所支付的价格。因随机收益流本身不可交易,通常的无套利定价原则失效,本节利用效用无差别定价方法给出随机收益流的价格。当然这种价格与投资者的效用偏好及风险厌恶程度是相关的。直观来说效用无差别价格是这样一种均衡价格:设投资者现时财富为 x,投资者支付资金 $p(x,t)$ 同时也获得了随机收益流 $Y(t)$ 与投资者未支付任何资金也未获得任何而外的随机收益(即只拥有财富 x)之间,所获得的最优财富期望效用是无差别的,则 $p(x,t)$ 就称为随机收益流的效用价格。下面正式给出效用无差别价格的定义。

定义 1　设投资者初始财富为 x,若 $p(x,t)$ 在任意时刻 t 满足如下方程:

$$V(x,t) = U(x-p,t) \tag{24}$$

则称 $p(x,t)$ 为资产 $Y(t)$ 的效用无差别价格。这里 V 和 U 分别是 2 及 3 节中定义的价值函数。

事实上,式(24)还可以改写为:

$$V(x+p,t) = U(x,t) \tag{25}$$

由效用无差别价格定义,式(25)显然成立。下面给出投资者为持有第三节定义的随机收益流所支付的价格。

定理 3　设投资者具有指数效用函数,若投资者要持有式(10)所定义的随机收益流,则需支付的效用无差别价格为:

$$p(x,t) = \left[\alpha - \frac{\rho\beta(\mu - r)}{\sigma}\right]\left[\frac{1 - e^{-r(T-t)}}{r}\right] - \frac{1}{2}\gamma\beta^2\left[\frac{e^{r(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{2r}\right](1-\rho^2) \tag{26}$$

证明　由式(8)、(16)及(24)可得:$\exp(\gamma p e^{r(T-t)} + h(t)) = 1$,即有 $\gamma p e^{r(T-t)} + h(t) = 0$,即:

$$p = -\frac{1}{\gamma}e^{-r(T-t)}h(t) \tag{27}$$

将式(18)代入式(27)整理即可得式(26)。证毕。

4　经济学解释及数值算例

为进一步说明模型的适用性,分析各参数选择对资产价格的影响。由式(26)可知:① 随机收益流的效

用价格与风险厌恶系数γ之间存在线性递减关系,价格随投资者风险厌恶系数γ的增加而减少。γ越大表示风险厌恶程度越深。显然,越是风险厌恶的投资者,为获取不确定的随机收益流,愿意支付的价格就越小。② 效用价格与其自身的平均回报率α之间存在线性递增关系,与自身的波动率β之间存在(非线性)递减关系,价格随平均回报率α的增加而增加,随着波动率β的增加而减少,这与直观是一致的。显然,资产回报率越大价格自然越高,波动率(风险)越大价格越低。③ 效用价格与无风险利率r之间存在(非线性)递减关系,无风险利率越高意味着资产的超额收益流(风险溢价$\alpha - r$)越低,自然价格就越低。④ 效用价格与相关系数ρ之间存在(非线性)递减关系,相关系数ρ越大说明收益流与可交易的风险资产(股票)相关性越大,投资者可以利用股票来部分对冲不可交易资产的风险,因此随机收益流的效用价格越小。

需要注意的是,由式(9)及式(17)知最优投资策略与投资者的财富无关。同样,由式(27)可知随机收益流的价格$p(x,t)$也独立于投资者所拥有的财富,即投资者无论拥有多少财富其购买这种随机收益流所愿意支付的价格是一样的。周知,这是由于投资者具有绝对风险厌恶系数的指数效用函数造成的。若选用幂效用函数、对数效用函数,则效用无差别价格与财富是相关的。但此时难以获得效用价格的显示解。当然也可以通过幂级数展开的方法获得其近似解,或者采用数值解。只为说明非完备市场中效用无差别定价的方法应用,故未讨论其他效用函数的情形。下面给出一个具体的算例来说明我们投资者风险厌恶态度对资产效用价格的影响。不妨设$\alpha=0.3$,$\beta=0.3$,$\mu=0.3$,$\sigma=0.3$,$r=0.02$,$\rho=0.1$,$T-t=2$[10,11],由表1,显然随机收益流的价格随投资者风险厌恶程度的提高而降低。

表1 收益流价格随风险厌恶系数的变动关系

γ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
P	0.183 75	0.179 30	0.174 84	0.170 39	0.165 93

5 结 论

研究了随机收益流的效用无差别定价问题。这类随机收益流可以是投资者投资的实物资产(比如投资房产,投资水利发电建设项目等),或者投资者从保险公司购买的随机年金所获得的收益。所有“以现时确定性价格获取未来不确定性随机收益流”的定价问题都适用效用无差别定价方法。若假设投资者具有指数效用函数,在随机收益流过程分别服从算术布朗运动条件下获得了效用无差别价格的闭式解。结果显示,随机收益流的效用无差别价格随投资者风险厌恶系数增大而增大,随着随机收益流的平均回报率α的增加而增加,随着波动率β的增加而减少。

参考文献:

[1] 罗琰,杨招军,张维. 非完备市场欧式期权无差别定价研究[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2011,38(9):87-92

[2] 刘兆鹏,张增林. 股票遵循 O-U 过程的几何亚式期权定价[J]. 重庆工商大学大学学报:自然科学版,2011,28(3):258-260

[3] 罗琰,杨招军,杨金强. 最大化生存概率的投资策略[J]. 中国管理科学,2009,17(4):46-52

[4] HODGES S, NEUBERGER A. Optimal replication of contingent claims under transaction costs[J]. Review of Futures Markets, 1989(8):222-239

[5] MUSIELA M, ZARIPHOPOULOU T. An Example of Indifference Prices under Exponential Preferences[J]. Finance and Stochastic, 2004(8):229-239

[6] HENDERSON V. Valuation of claims on non-traded asset using utility maximization[J]. Mathematical Finance,2002,12:351-373
[7] MIAO J J,WANG N. Investment Consumption and Hedging under Incomplete Markets[J]. Journal of Financial Economics,2007,86(3):608-642
[8] EWALD C,YANG Z J. Utility based Pricing and exercising of real options under geometric mean reversion and risk aversion toward idiosyncratic risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research,2008,68(1):97-123
[9] 易昊,杨招军. 均值回复收益的消费效用无差别定价[J]. 控制理论与应用. 2009,26(5):1-5
[10] 罗琰,杨招军. 最小化破产概率的投资策略[J]. 管理科学学报,2011,14(5):77-85,96
[11] 罗琰,杨招军. 基于随机微分博弈的保险公司最优投资决策[J]. 保险研究,2010(8):48-52
[12] 罗琰,杨招军. 保险公司最优投资及再保险策略[J]. 财经理论与实践,2009,30(3):31-34
[13] 罗琰,杨招军,杨金强. 最小化生命期破产概率的最优投资[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2009,36(8):84-87
[14] 闫海峰,刘利敏,杨建奇. 随机波动率模型的效用无差别定价和套期保值策略[J]. 系统工程学报,2007,22(4):379-385
[15] MERTON R C. Life time portfolio selection under uncertainty:the continuous time cases [J]. Review of Economics and statistics,1969,51:247-257

Utility Indifference Pricing of Stochastic Income Flows

LUO Yan[a] ,QIN Zhan-hui[b]

(a. School of Mathematics and Statistics;

b. School of Management,Nanjing University of Audit,Nanjing 210075, China)

Abstract: In this paper,we study a problem of utility indifference pricing of stochastic income flows. Based on the assumption of exponential utility functions,we obtained the explicit solution to utility prices of the stochastic income flows by solving Hamilton-Jacobi-Bellmen equation. Results indicate that the utility prices increase with the increase of the average return rates of stochastic earnings flows but decrease with the rise of the risk aversion of investors,which are consistent with the intuitions.

Key words:stochastic income flows;utility indifference pricing;Hamilton-Jacobi-Bellmen Equation

责任编辑:田　静