文章编号:1672 - 058X(2012)10 - 0016 - 06

影响模式转换市场下期权定价的因素*

王晓洁, 王子亭**, 梁 月

(中国石油大学(华东) 理学院,山东 青岛 266555)

摘 要:研究了影响模式转换市场下期权定价的因素。首先对模式转换市场下期权定价的三叉树模型进行了分析研究,并证明了其合理性;从而得出,影响模式转换市场下期权定价的因素主要是生成矩阵和不同模式下波动率的差值;然后通过数值算例,利用 Matlab 编程,证明了波动率对模式转换下期权定价的影响,并针对生成矩阵为对称矩阵的情况,通过数值算例说明了其对期权定价的影响。

关键词: 模式转换;Markov 链;期权定价;B-S 模型;三叉树

中图分类号:O 231.3 **文献标志码:**A

在过去几十年中,期权定价已经成为现代金融理论和时间的一个重要领域。自 B-S 公式引入以来,由于它的紧形式和计算的简便性,在金融业中颇受欢迎。然而,B-S 模型是在假设标的股票价格服从几何 Brown 运动的条件下提出的,当股票模型参数不是常数而是由 Markov 链控制时,期权定价就变得复杂了。

关于 Markov 调制的模式转换市场下期权定价模型的研究也有很多论文。Naik[1]提出了模式转换市场下欧式期权定价模型的简单处理方法;Buffington 和 Elliott[2]用了 PDE 方法处理欧式期权和美式期权;Boyle 和 Draviam[3]用 PDE 方法研究了模式转换市场下的奇异期权定价问题。对于欧式期权,Naik[1],Guo[4]和 Elliontt[5]等人提出了显式定价公式;Mamon 和 Rodrigo[6]通过考虑偏微分方程的解得到了模式转换市场下的欧式期权定价问题的显式解。所有的闭形式解都依赖于运行时间的分布,而运行时间很难求得。

二叉树模型是一类基本的数值分析方法,在金融衍生证券中有广泛的应用[7]。在二叉树的基础上,Boyle[8]提出的三叉树模型具有高度灵活性而且具有一些二叉树模型不具备的重要性质,因此在期权定价中有重要的应用。

此处采用三叉树方法,对完备市场及模式转换市场下的期权定价进行研究,得出模式转换对期权定价的影响。

收稿日期:2012 - 03 - 16;**修回日期:**2012 - 04 - 18.

* **基金项目:**中国石油大学(华东)研究生创新基金项目(CXYB11-18).

作者简介:王晓洁(1987-),女,山东潍坊人,硕士研究生,从事金融数学与随机分析研究.

** **通讯作者:**王子亭(1956-),男,山东聊城人,教授,理学博士,硕士生导师,从事金融数学、抛物型偏微分方程理论及其计算研究,Email: wangzt@ upc. edu. cn.

1　完备市场下的期权定价模型

1.1　Black-Scholes 模型[9]

在建立模型之前,先做如下假设:

(1) 标的资产价格演化遵循几何 Brown 运动:$\frac{\mathrm{d}s_t}{s_t}=r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t$,其中,$r$ 为无风险利率,σ 为波动率,$\mathrm{d}W_t$ 为标准 Brown 运动。

(2) 标的资产不支付股息。

(3) 不支付交易费和税收。

(4) 不存在套利机会。

欧式看涨期权的 Black-Scholes 公式为:

$$V(S,t) = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{x} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \tag{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{T - t}$$

2　模式转换市场下的期权定价模型

2.1　模型构建

完备市场下期权定价的三叉树模型中,无风险利率和波动率是常数,由风险中性概率测度理论有如下表达式:

$$\pi_u\mathrm{e}^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} + \pi_m + \pi_d\mathrm{e}^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = \mathrm{e}^{r\delta t} \tag{3}$$

$$(\pi_u + \pi_d)\lambda^2\sigma^2\Delta t = \sigma^2\Delta t \tag{4}$$

$$\pi_u + \pi_m + \pi_d = 1 \tag{5}$$

其中,$\lambda>1$,若已知 λ 的值,就可以计算出风险中性概率,从而可以构建整个树模型。

在模式转换模型中,无风险利率和波动率不是常数,它们的变化服从 Markov 链,在这种情况下,最常见的一个方法是,在网格中引入更多的分支,但是在多模式模型中,这个方法是不可行的。因此采用一种新的构建树的方法,当模式状态改变时,不去增加分支,而是改变风险中性概率测度。

假设,在 Markov 调制下的模式转换模型中有个状态,对应的标的资产的无风险利率和波动率分别为 r_1,r_2,$\cdots$,r_k 和 σ_1,σ_2,$\cdots$,σ_k,对状态 i,设股票上升、下降、保持不变的风险中性概率分别为 π_u^i、π_d^i 和 π_m^i,与简单三叉树模型类似,对 $1\leqslant i\leqslant k$,有以下方程组:

$$\pi_u^i\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + \pi_m^i + \pi_d^i\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = E^{r_i\Delta t} \tag{6}$$

$$(\pi_u^i + \pi_d^i)\sigma^2\Delta t = \sigma_i^2\Delta t \tag{7}$$

$$\pi_u^i + \pi_d^i + \pi_m^i = 1 \tag{8}$$

对每一个 i,定义,$\lambda_i=\sigma/\sigma_i$,那么 $\lambda_t>1$,π_u^i、π_d^i 和 π_m^i 的值可以表示为 λ_i 的形式:

$$\pi_m^i = 1 - \frac{1}{\lambda_t^2} \tag{9}$$

$$\pi_u^i = \frac{e^{r_i \Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} - (1 - 1/\lambda_i)(1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}} \tag{10}$$

$$\pi_d^i = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r_i \Delta t} - (1 - 1/\lambda_i)(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \tag{11}$$

其中,取

$$\sigma = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sigma_i \leqslant i \leqslant k\sigma_i + (\sqrt{1.5} - 1)\overline{\sigma} \tag{12}$$

2.2 模型主要思想

设 T 为期权的执行时间,N 为时间步数,则时间步长 $\Delta t = T/N$,在时刻 t,有 $2t+1$ 个节点,节点从最低股票价格水平算起,记 $S_{t,n}$为 t 时刻节点 n 的股票价。每个节点有 k 个可能的值,设 $V_{t,n,j}$为状态 j 下节点 n 在 t 时刻的值。

Markov 链的转移概率可以由生成矩阵得到,设生成矩阵为常数矩阵,记为 A,定义 $p_{ij}(\Delta t)$为长度为 Δt 的时间区间内状态 i 到状态 j 的转移概率,为简单起见,记为 p_{ij},则转移概率矩阵 P 可以表示为:

$$P(\Delta t) = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix} = e^{A\Delta t} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (\Delta t)^l A^l / ll \tag{13}$$

有了转移概率矩阵,期权在每个节点的值就可以通过迭代法得到。从执行时间开始,用倒推的方法,可以得到期权的值。还是以欧式看涨期权为例,在期权执行时刻 T,有:

$$V_{N,n,i} = (S_{N,n,i} - K)^+ \tag{14}$$

其中,

$$S_{N,n,i} = S_0 \exp[(n - 1 - N)\sigma\sqrt{\Delta t}] \tag{15}$$

有了执行价,使用式(16)的等式递归,就可以得到所有模式状态下的期权值:

$$V_{t,n,i} = e^{-r_i \Delta t}\left[\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(\pi_u^i V_{t+1,n+2,j} + \pi_m^i V_{t+1,n+1,j} + \pi_d^i V_{t+1,n,j})\right] \tag{16}$$

式(16)是模式转换市场下欧式期权定价的三叉树模型。

对于美式期权,在每个节点上比较 $V_{t,n,i}$与$(S+K)^+$,也就是,在每一步计算

$$e^{-r_i \Delta t}\left[\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(\pi_u^i V_{t+1,n+2,j} + \pi_m^i V_{t+1,n+1,j} + \pi_d^i V_{t+1,n,j})\right] \tag{17}$$

之后,与当时的收益函数$(S-K)^+$相比较,取其中较大的值作为 $V_{t,n,i}$,这样就可以求出所有模式状态下的期权值。

2.3 模型分析

在第 2.2 节中建立了模式转换市场下期权定价的三叉树模型,此节将对这个模型进行分析,说明该模型的合理性,进而分析模式转换对期权定价的影响。

容易看出,模式转换对期权定价的影响主要体现在转移概率矩阵上,因此,如果假设生成矩阵为零矩阵,则转移概率矩阵为单位矩阵。因此,对于状态的期权,有公式(6)-(8),其中 $\lambda_i > 1$,这里取 $\lambda_i = \sqrt{3}$,$\sigma = \lambda_i \sigma_i$。

以欧式看涨期权为例,在期权执行时刻,期权价值表示为式(14)(15)。有了执行价,使用式(18)的等式递归,就可以得到状态的期权值:

$$V_{t,n,i} = e^{-r_i \Delta t}(\pi_u^i V_{t+1,n+2,i} + \pi_m^i V_{t+1,n+1,i} + \pi_d^i V_{t+1,n,i}) \tag{18}$$

这恰好是完备市场下期权定价的三叉树模型[10],即当生成矩阵为零,即状态转移概率矩阵是单位矩阵时,模式转换市场下的三叉树模型即为完备市场下的三叉树模型。影响模式转换市场下期权定价的因素主要是生成矩阵,另外还有不同模式下波动率的差值。不同模式下波动率的相差越大,模式转换对期权定价的影响越大。下面来说明生成矩阵对模式转换市场下期权定价的影响。

3　数值算例

设标的资产的敲定价格为 100,符合几何 Brown 运动,不支付红利,该美式看涨期权具有 2 个模式转换状态,期权在一年后执行,初始价格为 S_0,取时间步数 $N=1\ 000$。

先来看波动率对期权定价的影响。设模式转换过程的生成矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$,两个模式的无风险利率均为 4%,模式 1 的波动率均为 0.25,第一种情况下模式 2 的波动率为 0.35,第二种情况下模式 2 的波动率为 0.65。Matlab 运行结果如下。

表 1　模式转换市场下波动率对期权定价的影响(情况 1)

S_0	完备市场下(B-S 公式)		模式转换市场下		两种市场下期权价格之差	
	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2
94	8.450 7	12.189 0	9.187 0	11.563 6	0.736 3	−0.625 3
96	9.514 2	13.302 4	10.232 4	12.646 5	0.718 2	−0.655 9
98	10.643 8	14.462 6	11.396 2	13.824 3	0.752 5	−0.638 3
100	11.837 0	15.668 1	12.560 1	15.002 1	0.723 0	−0.666 0
102	13.091 6	16.917 4	13.843 8	16.276 6	0.752 2	−0.640 8
104	14.404 7	18.208 7	15.127 6	17.551 0	0.722 9	−0.657 7
106	15.773 5	19.540 5	16.509 8	18.905 7	0.736 3	−0.634 8

表 2　模式转换市场下波动率对期权定价的影响(情况 2)

S_0	完备市场下(B-S 公式)		模式转换市场下		两种市场下期权价格之差	
	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2
94	8.450 7	23.191 6	11.586 1	20.958 2	3.135 4	−2.233 5
96	9.514 2	24.433 2	12.724 6	22.193 0	3.210 4	−2.240 2
98	10.643 8	25.699 1	13.863 1	23.427 9	3.219 4	−2.271 2
100	11.837 0	26.988 5	15.001 6	24.662 8	3.164 6	−2.325 7
102	13.091 6	28.300 7	16.332 2	25.997 3	3.240 6	−2.303 3
104	14.404 7	29.634 9	17.662 8	17.662 8	3.258 1	−2.303 0
106	15.773 5	30.990 5	18.993 3	28.666 4	3.219 9	−2.324 1

比较表 1 和表 2 的后两列发现,当改变其中一个模式下的波动率而其他条件保持不变时,如果两个模式下的波动率相差较大,那么模式转换对期权定价的影响就较大;相反,如果两个模式下的波动率相差较小,那么模式转换对期权定价的影响就较小,这主要是与计算过程中所取的 σ 值有关。因此,当模式间的波动率相差较大时,σ 值的选取要慎重。

下面分析生成矩阵对模式转换下期权定价的影响。设模式 1 下,无风险利率为 4%,波动率为 0.25,模式 2 下,无风险利率为 6%,波动率为 0.35,模式转换过程的生成矩阵分别为 $A_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$,$A_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,$A_3=\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 6 & -6\end{bmatrix}$。完备市场下的期权定价采用 Black-Scholes 公式,模式转换市场下的期权定价采用上面的三叉树方法。在这里,只讨论生成矩阵是对称矩阵的情况,即 $A=\begin{bmatrix}-p & p\\ p & -p\end{bmatrix}$,$p>0$。Matlab 运行结果如下:

表 3 模式转换市场下生成矩阵对期权定价的影响

S_0	A_1		A_2		A_3	
	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2	模式 1	模式 2
94	0.876 5	−0.789 6	1.356 4	−1.215 4	2.214 2	−1.940 3
96	0.8941	−0.806 5	1.384 7	−1.240 8	2.261 8	−1.979 6
98	0.911 0	−0.817 6	1.409 8	−1.258 6	2.301 6	−2.008 8
100	0.918 7	−0.829 8	1.423 5	−1.276 3	2.326 1	−2.035 5
102	0.928 6	−0.834 4	1.436 9	−1.284 5	2.345 7	−2.050 4
104	0.928 9	−0.840 9	1.438 9	−1.293 6	2.350 4	−2.064 1
106	0.931 1	−0.840 7	1.440 7	−1.294 4	2.350 8	−2.067 3

注:表 3 中的值为模式转换市场下的期权定价与完备市场下期权定价的差。

从表 3 可以看出,当生成矩阵 $A=\begin{bmatrix}-p & p\\ p & -p\end{bmatrix}$,其中 $p>0$ 时,随着 p 的增大,模式转换状态下期权值与完备市场下期权值的差增大,这说明,p 越大,生成矩阵对模式转换市场下的期权定价影响越大。

4 结 语

对模式转换市场下的期权定价进行了分析研究,证明了模式转换市场下期权定价的三叉树方法是合理的,并用数值算例分析了在生成矩阵是对称矩阵的情况下,模式转换市场期权定价情况,证明了不同模式下波动率的差值大小对模式转换市场下的期权定价有一定的影响。

参考文献:

[1] NAIK V. Option valuation and hedging strategies with jumps in volatility of asset returns[J]. The Journal of Finance,1993,48(5):1969-1984

[2] BUFFINGTON J,ELLIOTT R J. American options with regime switching[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance,2002,5 (5):497-514

[3] BOYLE P P,DRAVIAM T. Pricing exotic options under regime switching[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2007(40):267-282

[4] GUO X. Information and option pricings[J]. Quantitative Finance,2001 (1):37-57

[5] ELLIOTT R J,CHAN L L ,SIU T K. Option pricing and Esscher transform under regime switching[J]. Annals of Finance,2005(1):423-432

[6] MAMON R S,RODRIGO M R,Explicit solutions to European options in a regime-switching economy[J]. Operations Research Letters,2005 (33):581-586

[7] 傅德伟. 随机二叉树期权定价模型及模拟分析[D]. 厦门:厦门大学,2008

[8] BOYLE P P. Option valuation using a three-jump process[J]. International Options,1986 (3):7-12

[9] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003

[10] 何颖俞. 美式期权的三叉树定价模型[J]. 黑龙江大学学报:自然科学版,2008,25 (2):81-84

Factors Affecting Option Pricing under Regime Switch Market

WANG Xiao-jie,WANG Zi-ting,LIANG Yue

(School of Science,China University of Petroleum (East China),Shandong Qingdao 266555,China)

Abstract: The factors affecting option pricing under regime switch market are studied, firstly the trinomial model for option pricing under regime switch market is analyzed and studied, its rationality is proved, based on this, we derive that the factors affecting option pricing under regime switch market mainly include generator matrix and the difference value of volatility rate under different modes, then numerical example and Matlab programs are used to verify the impact of volatility rate on option pricing with regime switch while numerical example is used to illustrate the influence of generator matrix on option pricing as generator matrix is symmetric matrix.

Key words: regime switch; Markov chain; option pricing; B-S Model; trinomial

责任编辑:李翠薇