文章编号:1672 - 058X(2012)10 - 0006 - 04

关于 Hopf 分岔中向量函数泰勒公式中算子系数表示的评注*

袁 红[1], 张付臣[2]**, 李小武[3]
(1. 临沂大学 理学院,山东 临沂 276005;2. 重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331;
3. 贵州民族学院 计算机与信息工程学院,贵阳 550025)

摘　要: 给出了 Hopf 分岔中向量函数 $f:R^n\times R\to R^n$ 的泰勒展式中与黑赛矩阵形式相类似的一个比较完美的的系数具体表现形式,增强了对向量函数泰勒公式的算子系数的视觉认识. 这里向量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial),\cdots,f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial))^{\mathrm{T}}$.

关键词: Hopf 分岔;泰勒公式;向量函数;算子

中图分类号: O175　　　**文献标志码:** A

泰勒公式在数学分析和动力系统的研究中有着十分重要的作用,对于向量函数 $f:R^n\times R\to R^n$,可以给出泰勒展开式中与黑赛矩阵形式相类似的一个比较完美的算子系数形式. 以下将给出向量函数 $f:R^n\times R\to R^n$ 的泰勒展开式中算子系数的具体表现形式. 这里 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial),\cdots,f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial))^{\mathrm{T}}$.

首先给出 $f:R^2\to R^2$ 的泰勒公式中算子系数的具体表现形式,这里 $f(x_1,x_2)=(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2))^{\mathrm{T}}$.

1　主要内容

下面研究讨论一个在研究奇点为原点的 Hopf 分岔中起着非常重要作用的公式.

文献[1]中,考虑系统 $\dot{x}=f(x,\partial)$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in R^2$, $\partial\in R^1$,其中函数 f 光滑,在 $\partial=0$ 时有平衡点 $x=0$,在此平衡点有特征值 $\lambda_{1,2}=\pm w_0\mathrm{i}$, $w_0>0$,由于 $\lambda=0$ 不是其 Jacobi 的特征值,因此对于充分小 $|\partial|$,此系统有唯一平衡点 $x_0(\partial)$,并且可以将此平衡点移到原点. 系统可以写为

$$\dot{x}=A(\partial)x+F(x,\partial)\tag{1}$$

其中 $F(x,\partial)$ 为光滑向量函数,它的分量 $F_{1,2}$ 关于 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in R^2$ 的泰勒展开至少从第 2 项开始,这里 $A(\partial)$ 为 ∂

收稿日期:2012 - 01 - 11;修回日期:2012 - 02 - 18.
* 基金项目:国家青年科学基金(10901076).
作者简介:袁红(1981-),女,山东临沂人,讲师,硕士,从事小波分析及应用、微分方程、信号处理的研究.
** 通讯作者:张付臣 (1983-),男,山东临沂人,博士研究生,从事常微分方程稳定性和分岔的研究,E-mai:zhangfuchen1983@163. com.

的光滑函数,并且可以写为

$$A(\partial) = \begin{bmatrix} a(\partial), b(\partial) \\ c(\partial), d(\partial) \end{bmatrix}$$

假设在$\partial = 0$,公式(1)中的函数 $F(x,\partial)$可以表示为

$$F(x,\partial) = \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{3!}C(x,x,x) + \frac{1}{4!}D(x,x,x,x) + O(\|x\|^4) \tag{2}$$

公式(2)在研究平衡点为原点时的非退化 Hopf 分岔中起着非常重要的作用[1-3]. 这里 $B(x,y)$,$C(x,y,u)$,$D(x,y,u,z)$是 $x,y,u,z \in R^2$ 的对称多重线性向量函数,其坐标是

$$B_i(x,y) = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 F_i(\xi,0)}{\partial\xi_j \partial\xi_k}\bigg|_{\xi=0} x_j y_k, (i = 1,2)$$

$$C_i(x,y,u) = \sum_{j,k,l=1}^{2} \frac{\partial^3 F_i(\xi,0)}{\partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l}\bigg|_{\xi=0} x_j y_k u_l, (i = 1,2)$$

$$D_i(x,y,u,z) = \sum_{j,k,l,m=1}^{2} \frac{\partial^4 F_i(\xi,0)}{\partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l \partial\xi_m}\bigg|_{\xi=0} x_j y_k u_l z_m, (i = 1,2)$$

下面主要给出算子 B,C,D 的具体形式. 对于公式(2),有算子:B:$R^2 \times R^2 \to R^2$,C:$R^2 \times R^2 \times R^2 \to R^2$,$D$:$R^2 \times R^2 \times R^2 \times R^2 \to R^2$,并且有

$$B(x,y) = (x_1,x_2)B(y_1,y_2)^{\mathrm{T}} = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$$

$$C(x,y,u) = (u_1,u_2)\left((x_1,x_2)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}(y_1,y_2)^{\mathrm{T}} \right)$$

$$D(x,y,u,z) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} x^* y^* u^* z^*$$

这里 $x^* = (x_1,x_2)$或者 $x^* = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$,取决于实际需要,这是无关紧要的,只要最终能把 $B(x,y)$化成 $B(x,y) \in R^2$ 即可. 算子 B,C,D 为

$$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{111} & F_{112}\\F_{121} & F_{122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{211} & F_{212}\\F_{221} & F_{222}\end{pmatrix}\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{1111} & F_{1112}\\F_{1211} & F_{1122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{1211} & F_{1212}\\F_{1221} & F_{1222}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{2111} & F_{2112}\\F_{2121} & F_{2122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{2211} & F_{2212}\\F_{2221} & F_{2222}\end{pmatrix}\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{11111} & F_{11112}\\F_{11121} & F_{11122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{11211} & F_{11212}\\F_{11221} & F_{11222}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{12111} & F_{12112}\\F_{12121} & F_{12122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{12211} & F_{12212}\\F_{12221} & F_{12222}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{21111} & F_{21112}\\F_{21121} & F_{21122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{21211} & F_{21212}\\F_{21221} & F_{21222}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{22211} & F_{22212}\\F_{22121} & F_{22122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{22211} & F_{22212}\\F_{22221} & F_{22222}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

这里 $F_{111}=\frac{\partial^2 F_1(x,0)}{\partial x_1\partial x_1}\Big|_{x=0}$, $F_{12112}=\frac{\partial^4 F_1(x,0)}{\partial x_2\partial x_1\partial x_1\partial x_2}\Big|_{x=0}$ 等以此类推.

同样对于 $F(x,\partial)=\frac{1}{2}B(x,x)+\frac{1}{3!}C(x,x,x)+\frac{1}{4!}D(x,x,x,x)+O(\|x\|^4),x\in R^3$, 有

$$F(x_1,x_2,x_3,\partial)=\begin{pmatrix}F_1(x_1,x_2,x_3,\partial)\\F_2(x_1,x_2,x_3,\partial)\\F_3(x_1,x_2,x_3,\partial)\end{pmatrix}$$

可以考虑算子 $B:R^3\times R^3\to R^3$, $C:R^3\times R^3\times R^3\to R^3$, $D:R^3\times R^3\times R^3\times R^3\to R^3$ 的情况,这时有矩阵

$$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{111} & F_{112} & F_{113}\\F_{121} & F_{122} & F_{123}\\F_{131} & F_{132} & F_{133}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{211} & F_{212} & F_{213}\\F_{221} & F_{222} & F_{223}\\F_{231} & F_{232} & F_{233}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}F_{311} & F_{312} & F_{313}\\F_{321} & F_{322} & F_{323}\\F_{331} & F_{332} & F_{333}\end{pmatrix}\end{pmatrix},B(x,y,z)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)*(y_1,y_2,y_3)*(z_1,z_2,z_3)$$

其中$(x_1,x_2,x_3)_*=(x_1,x_2,x_3)$或者$(x_1,x_2,x_3)_*=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$;$(y_1,y_2,y_3)_*=(y_1,y_2,y_3)$或者$(y_1,y_2,y_3)_*=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$;$(z_1,z_2,z_3)_*=(z_1,z_2,z_3)$或者$(z_1,z_2,z_3)_*=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$,这是无关紧要的,取决于实际需要,只要最终能把$B(x,y,z)$化得$B(x,y,z)\in R^3$即可. 这里$x=(x_1,x_2,x_3)$,$y=(y_1,y_2,y_3)$,$z=(z_1,z_2,z_3)$,$F_{111}=\dfrac{\partial^2 F_1(x,0)}{\partial x_1\partial x_1}\Big|_{x=0}$,$F_{231}=\dfrac{\partial^2 F_2(x,0)}{\partial x_3\partial x_1}\Big|_{x=0}$,$F_{ijk}=\dfrac{\partial^2 F_i(x,0)}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{x=0}$,$i=1,2,3$;$j=1,2,3$;$k=1,2,3$;$\cdots$,以此类推.

同理,对于$F(x,\partial)=\dfrac{1}{2}B(x,x)+\dfrac{1}{3!}C(x,x,x)+\dfrac{1}{4!}D(x,x,x,x)+O(\|x\|^4)$,$x\in R^n$的泰勒展开,这里有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)=\begin{pmatrix}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)\\F_3(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)\\\vdots\\F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,\partial)\end{pmatrix}$$

这时$F:R^n\times R\to R^n$,$B:R^n\times R^n\to R^n$,$C:R^n\times R^n\times R^n\to R^n$,$D:R^n\times R^n\times R^n\times R^n\to R^n$.

$$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_{n-1}\\B_n\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}f_{111},f_{112},\cdots,f_{11n}\\f_{121},f_{122},\cdots,f_{12n}\\\vdots\\f_{1n1},f_{1n2},\cdots,f_{1nn}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f_{211},f_{212},\cdots,f_{21n}\\f_{221},f_{222},\cdots,f_{22n}\\\vdots\\f_{2n1},f_{2n2},\cdots,f_{2nn}\end{pmatrix}\\\vdots\\\begin{pmatrix}f_{i11},f_{i12},\cdots,f_{i1n}\\f_{i21},f_{i22},\cdots,f_{i2n}\\\vdots\\f_{in1},f_{in2},\cdots,f_{inn}\end{pmatrix}\\\vdots\\\begin{pmatrix}f_{n11},f_{n12},\cdots,f_{n1n}\\f_{n21},f_{n22},\cdots,f_{n2n}\\\vdots\\f_{nn1},f_{nn2},\cdots,f_{nnn}\end{pmatrix}\end{array}\right);B(x,y)=xBy^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_{n-1}\\B_n\end{pmatrix}(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$;这里$B_i(i=1,2,\cdots,n)$为$n\times n$矩阵,$C(x,y,u)$,$D(x,y,u,z)$可以类似地考虑,在此不再一一列举.

注:以$f:R^2\times R\to R^2$为例,说明算子B,C,D的几何意义,则有算子$B:R^2\times R^2\to R^2$,$C:R^2\times R^2\times R^2\to R^2$,

$D:R^2\times R^2\times R^2\times R^2\to R^2$,

$$f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}f_{11},f_{12}\\f_{21},f_{22}\end{pmatrix}\to B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{111},f_{112}\\f_{121},f_{122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f_{211},f_{212}\\f_{221},f_{222}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\to C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{1111}&f_{1112}\\f_{1211}&f_{1122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f_{1211}&f_{1212}\\f_{1221}&f_{1222}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f_{2111}&f_{2112}\\f_{2121}&f_{2122}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f_{2211}&f_{2212}\\f_{2221}&f_{2222}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

则$f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}f_{11},f_{12}\\f_{21},f_{22}\end{pmatrix}$,相当于把一条线段的两个断点$f_1,f_2$扩展成一个正方形的 4 个顶点$f_{11},f_{12},f_{21},f_{22}$;$A=\begin{pmatrix}f_{11},f_{12}\\f_{21},f_{22}\end{pmatrix}\to B$ 相当于把正方形的这 4 个顶点$f_{11},f_{12},f_{21},f_{22}$张成立方体的 8 个顶点$f_{111},f_{112},f_{121},f_{122},f_{211},f_{212}$,$f_{221},f_{222}$;而对于 $B(x,y)=xBy^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$,相当于$f\to A\to B\to C$ 的逆变换;$B\to xB$ 相当于把立方体的 8 个顶点$f_{111},f_{112},f_{121},f_{122},f_{211},f_{212},f_{221},f_{222}$压缩成一个正方形的 4 个顶点$f_{11},f_{12},f_{21},f_{22}$;$xB\to xBy^{\mathrm{T}}$ 相当于把正方形的 4 个顶点$f_{11},f_{12},f_{21},f_{22}$压缩成一条线段且其两个端点分别为$f_1,f_2$. 对于算子 $C:R^2\times R^2\times R^2\to R^2$,$D:R^2\times R^2\times R^2\times R^2\to R^2$ 的几何意义可以类似地考虑,在此不再一一列举.

2 结　论

对于在动力系统中分支中比较重要的一个多元向量函数的泰勒公式,从形式上给出了与文献专著[4]中的黑赛矩阵相类似的一个比较完美的系数表现形式,增强了对向量函数泰勒公式的视觉认识.

参考文献:

[1] 尤里·阿·库兹涅佐夫. 应用分支理论基础[M]. 金成桴,译. 北京:科学出版社,2009

[2] 郭改慧,吴建华,任小红,等. 具有扩散的广义 Brusselator 系统的 Hopf 分歧[J]. 应用数学和力学,2011(32):1100-1109

[3] 任菲. 广义 Logistic 模型的 Hopf 分支与计算机仿真[J]. 计算机工程与应用,2011(47):31-34

[4] 华东师范大学数学系. 数学分析下册[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2002

(下转第 15 页)