文章编号:1672 - 058X(2012)10 - 0001 - 05

具有存放的功能性反应捕食与被捕食系统的动力性态*

梁　娟,刘　双

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘　要:研究一类被捕食者(食饵)种群具有常数存放率的 Holling—III 类功能性反应捕食与被捕食系统的定性性质,当该系统具有存放率时,分析了系统非负平衡点及其稳定性. 利用计算第一系数的方法,研究了弱中心附近的超临界 Hopf 分岔与跨临界 Hopf 分岔.

关键词: Holling—III 型;平衡点;Hopf 分支;极限环

中图分类号:O175.12　　**文献标志码:**A

Holling 型功能反应系统是数学生物研究领域中最为典型和重要的系统之一,Holling 反应函数较为合理地反映了捕食者与食饵的相互作用关系. 关于具有 Holling—III 功能性反应的捕食者-食饵模型,目前已有不少研究结果[1-6]. 一般地,具有 Holling—III 功能反应的比率依赖食饵系统可以表述为微分方程组模型[7]:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{\alpha x^2 y}{\beta + x^2} \\ \dot{y} = \dfrac{e\alpha x^2 y}{\beta + x^2} - \mathrm{d}y \end{cases} \tag{1}$$

其中,$x>0$,$y>0$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度,$K>0$ 表示食饵的进位容量,$d>0$ 表示捕食者的死亡率,$r>0$ 表示食饵的内在增长率,$\dfrac{ax^2}{(b+x^2)}$表示功能性反应函数,$a>0$,$b>0$,$e>0$ 分别表示捕获率、半饱和常系数和转化率. 文献[1,2]研究了捕食者无密度制约,食饵具有非线性密度制约时,系统(1)的非双曲平衡点的全局稳定性和极限环的唯一存在性条件. 文献[3]研究了系统(1)平衡点全局稳定和局部稳定的充要条件,并且证明了极限环的存在性. 随后人们对第三类 Holling 功能性反应模型作了进一步的研究,例如文献[4,5]分别讨论了系统(1)中捕食者无密度制约,食饵具有非线性密度制约的捕食者 - 食饵扩散模型解的整体性态. 文献[6]讨论了系统(1)在参数变化范围内极限环的存在性与唯一性. 接着前人的研究成果,针对被捕食者具有密度制约,且被捕食者有存放的 Holling—III 系统进行研究.

此时,将模型(1)就变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{\alpha x^2 y}{\beta + x^2} + h \\ \dot{y} = \dfrac{e\alpha x^2 y}{\beta + x^2} - \mathrm{d}y \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2012 - 03 - 05;**修回日期:**2012 - 03 - 23.

* **基金项目:**国家自然科学基金(11171360).

作者简介:梁娟(1987-),女,山西人,硕士研究生,从事动力系统研究.

其中 $h>0$ 表示常存放率.

系统(2)至多有 2 个平衡点,其中一个在第一象限的边界上,一个在第一象限内. 在边界上的平衡点可以为双曲鞍点、双曲结点,也可以为非双曲的鞍 - 结点. 内部平衡点对不同的参数取值范围,可以是稳定结点、不稳定结点,还可以是退化的平衡点. 此处利用第一 Lyapunov 系数方法,研究了弱中心平衡点处的 Hopf 分支方向及其稳定性.

1　平衡点的动力性态

为了简化以后的计算,先对系统做变换,化为与之轨道等价的多项式系统. 对系统(2)做变换 $\mathrm{d}t=(\beta+x^2)\mathrm{d}T$ 得到:

$$\begin{cases}\dot{x}=(a_1+a_2x-a_3x^2)(\beta+x^2)-\alpha x^2y\\ \dot{y}=y(-\beta d+nx^2)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $a_1=h,a_2=r,a_3=\dfrac{r}{k},n=ea-d$. 很显然,要使系统(3)存在正平衡点,$n$ 的取值限定为 $n>0$.

进一步对式(3)作变换:$x=\sqrt{\beta}\bar{x},y=\dfrac{\sqrt{\beta}d}{\alpha}\bar{y},t=\left(\dfrac{1}{\beta d}\right)T$,则式(3)化为:

$$\begin{cases}\dot{x}=(-ax^2+bx+c)(1+x^2)-x^2y\\ \dot{y}=y(-1+mx^2)\end{cases}\tag{4}$$

其中 $a=a_3\dfrac{\sqrt{\beta}}{d},b=\dfrac{a_2}{d},c=\dfrac{a_1}{d\sqrt{\beta}},m=\dfrac{n}{d}$. 系统(4)的平衡点可以通过两种情况计算:$y=0$ 和 $y\neq0$. 直接计算可知,系统(4)有下面平衡点,分别为:

$$E_1=\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a},0\right),E_2=(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{m}},(-a+b\sqrt{m}+cm)\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)$$

注意到 $x_0>0,y_0>0$,因此 E_2 在第一象限内,当且仅当 $a<b\sqrt{m}+cm$;当 $a=b\sqrt{m}+cm$ 时,$E_1=E_2$. 下面讨论系统(4)在平衡点附近的动力形态(设 $k=\sqrt{b^2+4ac}$).

定理 1　设 $m_0=\dfrac{4a^2}{(b+k)^2}$,对于平衡点 E_1,下列结论成立:

(1) 当 $m>m_0$ 时,E_1 为不稳定鞍点;(2) 当 $m<m_0$ 时,E_1 为稳定结点;(3) 当 $m=m_0$ 时,E_1 为鞍 - 结点.

证明　对于平衡点 E_1,系统(4)在平衡点处的 Jacobi 矩阵为:

$$A=\frac{1}{4a^2}\begin{bmatrix}-2b^2(k+b)-4a(ck+2bc+ak) & -(b+k)^2\\ 0 & -4a^2+m(b+k)^2\end{bmatrix}$$

特征方程为 $T(\lambda)=\left(\lambda-\dfrac{-2b^2(k+b)-4a(ck+2bc+ak)}{4a^2}\right)\left[\lambda-\left(-1+\dfrac{m(b+k)^2}{4a^2}\right)\right]$,由此得特征值为:

$$\lambda_1=\frac{-2b^2(k+b)-4a(ck+2bc+ak)}{4a^2},\lambda_2=-1+\frac{m(b+k)^2}{4a^2}$$

因为系统(4)所有参数都是正的,可以得到 $\lambda_1<0$. 则有以下结论成立:

(1) 当 $m>m_0,\lambda_1<0,\lambda_2>0$ 时,由文献[8]第二章知,E_1 为鞍点;(2) 当 $m<m_0,\lambda_1<0,\lambda_2<0$ 时,由文献[8]第二章知,E_1 为稳定结点;(3) 当 $m=m_0$ 时,对于系统(4),将平衡点移到原点,令 $x_1=x-\dfrac{(b+k)}{2a}$,

$y_1 = y$,然后再做变换 $x_2 = x_1 + gy_1, y_2 = y_1$,得到:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= g_2 x + g_1 x^2 + \left(gg_1 + \frac{(b+k)}{a} - \frac{4ag}{(b+k)}\right)gy^2 - \left(\frac{(b+k)}{a} + 2gg_1 - \frac{4ag}{(b+k)}\right)xy + \\ &\left(3g(b+2k) - 1 + \left(\frac{4a^2g}{(b+k)^2}\right)\right)x^2y + \left(2 - (3b+6k)g - \frac{8a^2g}{(b+k)^2}\right)gxy^2 - \\ &(b+2k)x^3 + \left((b+2k)g - 1 + \frac{4a^2g}{(b+k)^2}\right)g^2y^3 - a(x-gy)^4 \\ \dot{y} &= \frac{4a(xy - gy^2)}{(b+k)} + \frac{4a^2(x^2y - 2gxy^2 + g^2y^3)}{(b+k)^2}\end{aligned}$$

其中,$g_2 = \dfrac{(-2b^2k - 8abc - 2b^3 - 4ack - 4a^2k)}{4a^2}$,$g = -\dfrac{(b+k)^2}{4a^2g_2}$,$g_1 = \dfrac{(-10ac - 3b^2 - 2a^2 - 3bk)}{2a}$. 由文献[9]中2.11节知:$E_1$ 是鞍-结点. 证明完成. 下面研究平衡点 E_2 的动力性态,计算可知$\dfrac{b\sqrt{m}(1-m)}{2} - cm^2 < b\sqrt{m} + cm$.

定理 2　设 $a_0 = \dfrac{b\sqrt{m}(1-m)}{2} - cm^2$,对于平衡点 E_2,由文献[10]知,下列结论成立:

(1) 当 $0 < a < a_0$ 时,E_2 为不稳定结点;(2) 当 $b\sqrt{m} + cm > a > a_0$,E_2 是渐近稳定的结点;(3) 当 $a = a_0$ 时,E_2 是弱中心.

证明　对于平衡点 E_2,系统(4)在平衡点 E_2 的 Jacobi 矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{b\sqrt{m}(1-m) - 2cm^2 - 2a}{m\sqrt{m}} & -\dfrac{1}{m} \\ 2\sqrt{m}\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)(-a + b\sqrt{m} + cm) & 0 \end{bmatrix}$$

用 $|A|$ 和 $\mathrm{tr}(A)$ 分别表示矩阵 A 的行列式和迹,令 λ_1, λ_2 表示矩阵的特征值,则

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{b\sqrt{m}(1-m) - 2cm^2 - 2a}{m\sqrt{m}} = \lambda_1 + \lambda_2,\ |A| = \frac{2}{\sqrt{m}}\left(1 + \frac{1}{m}\right)(-a + b\sqrt{m} + cm) = \lambda_1\lambda_2$$

因为 $a < b\sqrt{m} + cm$,所以 $-a + b\sqrt{m} + cm > 0$, $|A| > 0$.

(1) 当 $0 < a < a_0$ 时,显然 $\mathrm{tr}(A) > 0$. 注意到 $|A| > 0$,即有 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,$E_2$ 为不稳定结点;(2) 当 $a_0 < a < b\sqrt{m} + cm$ 时,显然 $\mathrm{tr}(A) < 0$, $|A| > 0$,即有 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$,$E_2$ 是渐近稳定的结点;(3) 当 $a = a_0$ 时,有$\mathrm{tr}(A) = 0$. 令 $w(a) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4|A(a)| - (\mathrm{tr}A(a))^2}$,$u(a) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A)$,则有 $u(a_0) = 0$,且 $w^2(a_0) = \dfrac{(m+1)^2(2c\sqrt{m} + b)}{m} > 0$. 因此,在 $a = a_0$ 处平衡点 E_0 有特征值 $\lambda_{1,2}(a_0) = \pm \mathrm{i}w(a_0)$, 因此平衡点 E_2 是弱中心.

2　Hopf 分岔及其稳定性

在定理 2 的(3)中,得到:当 $a = a_0$ 时,E_2 是弱中心. 下面研究在 E_2 附近当参数变动时,能够产生 Hopf 分岔,以及 Hopf 分岔的方向.

定理 3　当 $a = a_0$ 时,系统(4)在平衡点 E_2 附近会发生 Hopf 分岔.

(1) 当 $c > c_0$ 时,系统(4)在 E_2 附近会出现唯一不稳定极限环;(2) 当 $c < c_0$ 时,系统(4)在 E_2 附近会出现唯一的稳定极限环;(3) 当 $c = c_0$ 时,平衡点 E_2 是系统(4)退化的弱中心.

证明　$u'(a_0) = -\dfrac{1}{m\sqrt{m}} \neq 0$,并且由上述证明得到 $u(a_0) = 0$. 所以在平衡点 E_2 附近会发生 Hopf 分岔[11]. 下面讨论 Hopf 分叉的方向及稳定性.

当 $a=a_0$ 时,平衡点 E_2 的坐标是 $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{m}},\frac{(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2}{2m}\right)$,在式(4)中,将 $E_2(x_0,y_0)$ 移到原点,引入变量变换 $x=x_0+\zeta_1,y=y_0+\zeta_2$,则系统(4)变为:

$$\begin{cases}\dot{\sigma}_1 = -a\xi_1^4+(-b+2bm+4cm\sqrt{m})\xi_1^3-\xi_1^2\xi_2+\left(\frac{3b\sqrt{m}}{2}+4cm-\frac{b}{2\sqrt{m}}\right)\xi_1^2-\frac{2}{\sqrt{m}}\xi_1\xi_2-\frac{1}{m}\xi_2\\ \dot{\sigma}_2 = m\xi_1^2\xi_2+\left(\frac{b\sqrt{m}}{2}+cm\right)(m+1)^2\xi_1^2+2\sqrt{m}\xi_1\xi_2+(b+2c\sqrt{m})(m+1)^2\xi_1\end{cases}$$

此系统可表为:$\dot{\zeta}=A\zeta+\frac{1}{2}B(\zeta,\zeta)+\frac{1}{6}C(\zeta,\zeta,\zeta)$,其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2)^{\mathrm{T}}$,$\eta=(\eta_1,\eta_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\delta(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{T}}$ 取值,B 和 C 满足

$$B(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\left(3b\sqrt{m}+8cm-\frac{b}{\sqrt{m}}\right)\xi_1\eta_1\\ 2\sqrt{m}(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)+(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2\xi_1\eta_1\end{bmatrix}$$

$$C(\xi,\eta,\delta)=\begin{bmatrix}6(-b+2bm+4cm\sqrt{m})\xi_1\eta_1\delta_1-2(\xi_1\eta_1\delta_2+\xi_1\eta_2\delta_1+\xi_2\eta_1\delta_1)\\ 2m(\xi_1\eta_1\delta_2+\xi_1\eta_2\delta_1+\xi_2\eta_1\delta_1)\end{bmatrix}$$

当 $a=a_0$ 时,$A(a_0)=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{m}\\ mw^2 & 0\end{bmatrix}$. 取两个复向量 $q=\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}wm\end{bmatrix}$,$p=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -\frac{\mathrm{i}}{wm}\end{bmatrix}$,满足 $Aq=\mathrm{i}wq$,$A^{\mathrm{T}}p=-\mathrm{i}wp$,并且 $[p,q]=1$. 由 B 和 C 的定义可知:

$$B(q,q)=\left[3b\sqrt{m}+8cm-\frac{b}{\sqrt{m}},\ -4\mathrm{i}wm\sqrt{m}+(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2\right]^{\mathrm{T}}$$

$$B(q,\bar{q})=\left[3b\sqrt{m}+8cm-\frac{b}{\sqrt{m}},(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2\right]^{\mathrm{T}}$$

$$C(q,q,\bar{q})=[6(-b+2bm+4cm\sqrt{m})+2\mathrm{i}wm,\ -2\mathrm{i}wm^2]^{\mathrm{T}}$$

引入 $g_{20}=[p,B(q,q)]$,$g_{11}=[p,B(q,\bar{q})]$,$g_{21}=[p,C(q,q,\bar{q})]$,分别得:

$$g_{20}=4cm+2\sqrt{m}+\frac{3b\sqrt{m}}{2}-\frac{b}{2\sqrt{m}}+\frac{(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2\mathrm{i}}{2wm}$$

$$g_{11}=4cm+\frac{3b\sqrt{m}}{2}-\frac{b}{2\sqrt{m}}+\frac{(b\sqrt{m}+2cm)(m+1)^2\mathrm{i}}{2wm}$$

$$g_{21}=3(-b+2bm+4cm\sqrt{m})+\mathrm{i}wm+m$$

计算第一 Lyapunov 系数

$$l_1(\alpha_0)=\frac{1}{2w^2}\mathrm{Re}(\mathrm{i}g_{20}g_{11}+wg_{21})=\frac{(b+2c\sqrt{m})(m+1)^2b_0}{4w^3m}$$

其中 $b_0=-5b+(9b+16c\sqrt{m})m$,易知 $l_1(\alpha_0)$ 与 b_0 符号相同,令 $c_0=\frac{(5-9m)b}{16m\sqrt{m}}$.(1) 当 $c>c_0$ 时,$b_0>0$,即 $l_1(\alpha_0)>0$,系统(4)在 E_2 附近会出现唯一不稳定极限环;(2) 当 $c<c_0$ 时,$b_0<0$,即 $l_1(\alpha_0)<0$,系统(4)在 E_2 附近会出现唯一的稳定极限环;(3) 当 $c=c_0$ 时,$b_0=0$,即 $l_1(\alpha_0)=0$,平衡点 E_2 是系统(4)退化的弱中心.

诱饵的出生率 a 会有一个临界值 a_0. 当出生率跨过这个临界值时,捕食者与诱饵构成的生物系统会出现稳定的极限环. 这意味着捕食者与诱饵之间可以以稳定周期解的形式长期生存下去.

参考文献:

[1] 陈柳娟,孙建华. 一类 Holling 功能性反应模型极限环的唯一性[J]. 数学学报,2002,3(45):383-388

[2] CHEN J P,ZHANG H D. The qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling'S type lII function respon[J]. Appl Math Mech,1986,7(1):77-86

[3] WANG Y Q. MA J Y. Qualitative Analysis on a Class of Predator-prey Model with Holling III Functional Response[J]. Journal of Biomathematics,2004,19(4):395-402

[4] 郭凌,伏升茂. 具有 HollingⅢ类功能反应的捕食者-饵扩散模型的稳定性[J]. 兰州大学学报,2008,44(2):107-110

[5] KOOIJ R E,ZEGELING A. Qualitative properties of two-dimensional predator-prey system [J]. Nonlinear Analysis TMA,1997,29(6):693-715

[6] 王倩倩,李宝麟. 一类具有功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(2):5-9

[7] 陈兰荪,孟新柱,焦建军. 生物动力学[M]. 北京:科学出版社,2009

[8] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985

[9] PERKO L. Differential Equation and Dynamical Systems[M]. 2 Edition. New York:Spinger,1996

[10] JOHN G,PHILIP H. Nolinear Oscillation,Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. New York:Spinger,1983

[11] YURI A K. Elements of Applied Bifurcation Theory(second edition)[M]. New York:Spinger,2009

Dynamics Condition of Predator-prey System with Functional Response and with Constant Stocking Rate

LIANG Juan, LIU Shuang

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper studies qualitative properties of predator-prey system with Holling-III Model functional response of a type of prey species with constant stocking rate, analyzes the nonnegative balance point and its stability of this system when this system has stocking rate and uses the method for calculating the first coefficient to study supercritical Hopf bifurcation and transcritical Hopf bifurcation near weak center.

Key words: Holling-III Model; balance point; Hopf bifurcation; limit cycle

责任编辑:李翠薇