

文章编号:1672-058X(2012)09-0101-05

基于 Matlab 的可视化理论力学虚拟实验*

敖文刚

(重庆工商大学 机械工程学院,重庆 400067)

摘要:在传统的理论力学教学过程中,很多问题都只能进行瞬态分析,而无法对整个运动过程进行分析,且求解过程一般又对解题技巧有较高要求;利用 Matlab 强大的数值计算能力和图形处理技术,对力学问题进行过程分析,并将结果以曲线、动画等直观的形式表现出来,以提高学生对理论力学的感性认识。

关键词: Matlab; 计算机助学; 可视化用户界面; 双摆运动

中图分类号: G420

文献标志码: A

在当前理论力学教学课时量压缩至 54 学时的情况下,对于那些不易手动求解,或只能解出某些瞬态结果的运动学、动力学问题,引入 Matlab 来做过程分析,既能使学生加深对力学问题的认识,又可以学习如何借助计算机来分析运动学、动力学问题,为后续课程(如机械原理)、课程设计和毕业设计中的数值仿真做一定知识和方法上的准备。

1 可视化虚拟实验思想

哈工大版^[1]的理论力学是最为经典的教材,其体系完备、论述严谨,但内容较多、难度较大,且运动学、动力学的问题主要进行的是瞬态分析。洪嘉振^[2]版的理论力学注重力学建模的过程分析和程式化,理论力学问题求解器为过程分析提供了强有力的工具。彭芳麟、邓旭辉、李新成、阚文彬^[3-6]等运用 Matlab 通过多种形式分析了一些运动学、动力学问题,以曲线、动画等形式比较直观地表达了其分析结果。随着近年来计算机的普及,大学生通过工具软件来辅助学习也是一种较好的途径,因此以开放性实验的方式开展基于 Matlab 的理论力学虚拟实验是提高理论力学教学效果的有效方式。根据理论力学的基本原理,利用 Matlab 软件强大的数值计算和图形处理技术设计出比较友好的虚拟实验可视化用户界面,以帮助学生利用 Matlab 分析力学问题,并将分析结果以曲线、动画和 excel 数据表格等形式直观、准确地表现出来。虚拟实验可视化用户界面左上角为初始条件和相关参数设置区域,可随具体力学问题而有所变化;右上角包括“计算”、“曲线”、“动画”和“数据输出”等功能按钮;左下区域用于显示相关曲线;右下区域用于显示动画。以计算机助学为目标开发的理论力学虚拟实验可视化用户界面是将界面设计、图形处理、动画制作和文件处理这些与理论力学问题没有太大关系的编程工作预先处理好,将根据理论力学问题简化出的微分方程转化为 Matlab 虚拟实验可视化用户界面中的功能子函数的任务交给学生完成。与使用 M 文件的形式相比,可视化用户界面可以让学生更加专注于力学问题本身,对相关参数和初始条件的修改更加方便,而且对计算结果的观察、分析也更直观、准确。

收稿日期:2012-01-10;修回日期:2012-03-16.

* 基金项目:重庆市教委教改项目(113019).

作者简介:敖文刚(1976-),男,重庆人,讲师,从事工程力学教学科研工作.

2 运用虚拟实验可视化用户界面分析椭圆规运动

例 1 如图 1 所示,已知 $OA = AC = AB = l$, $AP = a$, 曲柄 OA 与 x 轴的夹角 $\varphi = \omega t$, 求点 P 的轨迹、速度。

将 P 点作为研究对象, 可以从 x, y 坐标描述 P 点的运动, 其 x, y 方向的运动方程可表达为:

$$\begin{cases} x = (l + a) \cos \varphi \\ y = (l - a) \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

对方程(1)两边对时间进行一次微分, 则可以得到其 x, y 方向的速度表达式为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(l + a) * \omega * \sin \varphi \\ \frac{dy}{dt} = (l - a) * \omega * \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

再对方程(2)两边对时间进行一次微分, 则可以得到其 x, y 方向的加速度表达式为:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -(l + a) * \omega^2 * \cos \varphi \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -(l - a) * \omega^2 * \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

设 $y_1 = x, y_2 = \frac{dx}{dt}, y_3 = y, y_4 = \frac{dy}{dt}$, 可以将式(3)化为 4 个一阶微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -(l + a) * \cos \varphi * \omega^2 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = -(l - a) * \sin \varphi * \omega^2 \end{cases} \quad (4)$$

根据式(4)得到其功能子函数:

```
function ydot = tygydfun(t, y, flag, l, a, emuga)
```

```
ydot = [y(2);
```

```
-(l + a) * cos(t * emuga) * emuga^2
```

```
y(4);
```

```
-(l - a) * sin(t * emuga) * emuga^2];
```

当时间 $t = 0$ 时, $\varphi = 0, x_p = l + a, y_p = 0, v_x = 0, v_y = (l - a) * \omega$, 当长度 l, a 和 ω 取定后, P 点的运动的初始条件也就确定了。例 1 中取 $l = 200, a = 60, \omega = 2$, 图 2 是其水平速度、竖直速度的曲线和 P 点运动的动画。

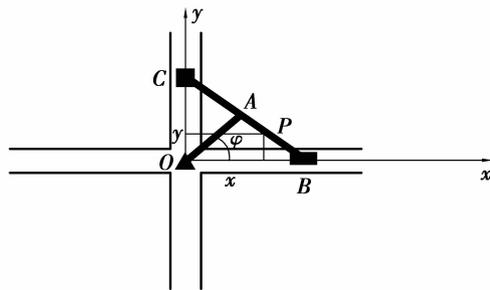


图 1 椭圆规运动

3 运用虚拟实验可视化用户界面分析双摆运动

例 2 如图 3 所示, 两个摆长为 l , 摆锤质量为 m 的单摆, 用光滑铰链连接成双摆, 两个摆只能在一个竖直平面内运动, 研究其运动。

以摆锤偏离平衡位置的摆角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标, 则可以得到系统的拉格朗日函数为:

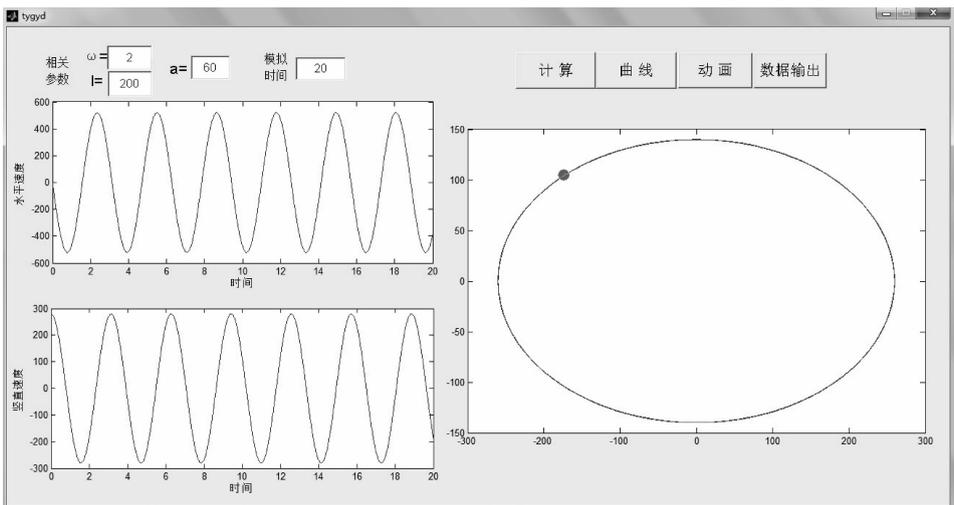


图 2 椭圆规运动分析可视化用户界面

$$L = ml^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 + ml^2 \frac{d\theta_1}{dt} \frac{d\theta_2}{dt} \cos(\theta_2 - \theta_1) + mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (5)$$

由拉格朗日方程得:

$$\begin{cases} 2l \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \cos(\theta_2 - \theta_1) - l \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2g \sin \theta_1 = 0 \\ l \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + l \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \cos(\theta_2 - \theta_1) + l \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

(6)

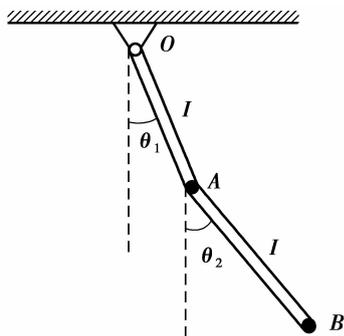


图 3 双摆运动

通过计算可得到

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = \frac{1}{2l - l \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \left[\begin{array}{l} l \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) + g \sin \theta_2 \\ \cos(\theta_2 - \theta_1) + l \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 2g \sin \theta_1 \end{array} \right] \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = \frac{1}{2l - l \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \left[\begin{array}{l} -l \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2g \sin \theta_1 \\ \cos(\theta_2 - \theta_1) - 2l \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 2g \sin \theta_2 \end{array} \right] \quad (8)$$

设 $y_1 = \theta_1, y_2 = \frac{d\theta_1}{dt}, y_3 = \theta_2, y_4 = \frac{d\theta_2}{dt}$, 可将以微分方程(7)(8)化简为以下方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{2l - l \cos^2(y_3 - y_1)} \left[\begin{array}{l} ly_2^2 \sin(y_3 - y_1) \cos(y_3 - y_1) + g \sin y_3 \\ \cos(y_3 - y_1) + ly_4^2 \sin(y_3 - y_1) - 2g \sin y_1 \end{array} \right] \\ \frac{dy_3}{dt} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = \frac{1}{2l - l \cos^2(y_3 - y_1)} \left[\begin{array}{l} -ly_4^2 \sin(y_3 - y_1) \cos(y_3 - y_1) + 2g \sin y_1 \\ \cos(y_3 - y_1) - 2ly_2^2 \sin(y_3 - y_1) - 2g \sin y_3 \end{array} \right] \end{cases} \quad (9)$$

则可以根据(9)式得到其功能函数:

```
function ydot = sbydfun(t,y,flag,l)
```

```
g = 9.8
```

```
ydot = [y(2);
```

```
(1 * y(2)^2 * sin(y(3) - y(1)) * cos(y(3) - y(1)) + g * sin(y(3)) * cos(y(3) - y(1)) + ...
```

```
l * y(4)^2 * sin(y(3) - y(1)) - 2 * g * sin(y(1)))/(2 * l - l * (cos(y(3) - y(1)))^2);
```

```
y(4);
```

```
(-1 * y(4)^2 * sin(y(3) - y(1)) * cos(y(3) - y(1)) + 2 * g * sin(y(1)) * cos(y(3) - y(1)) - ...
```

```
2 * l * y(2)^2 * sin(y(3) - y(1)) - 2 * g * sin(y(3)))/(2 * l - l * (cos(y(3) - y(1)))^2)];
```

只要学生能够正确写出功能函数 `sbydfun(t,y,flag,l)`,就可以分析双摆的运动了。图 4 是在初始条件为 $\theta_1 = 1 \text{ rad}$, $\theta_2 = 1 \text{ rad}$, $\omega_1 = 0.3 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 0.4 \text{ rad/s}$, 相关参数为摆长 $l = 12 \text{ m}$, 模拟时间 $T = 24 \text{ s}$ 条件下所得到的摆角、角速度曲线和动画的界面。点击“数据输出”按钮,可以把程序计算结果输出到指定的文件,表 1 是输出文件中的一个片段。

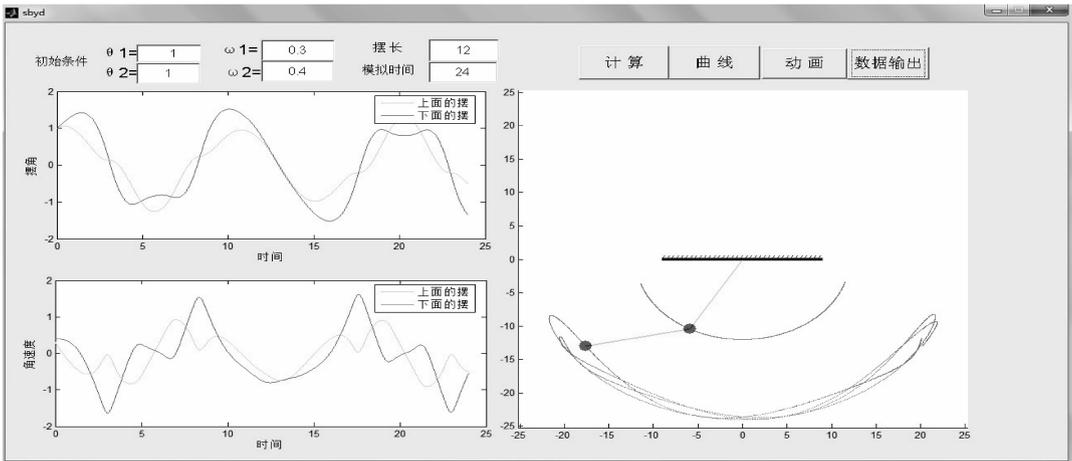


图 4 双摆运动分析可视化用户界面

表 1 输出文件

时间	摆角 1	角速度 1	摆角 2	角速度 2
0	1	0.3	1	0.4
0.01	1.002 966	0.293 125	1.004 000	0.399 994
0.02	1.005 862	0.286 244	1.008 000	0.399 975
0.03	1.008 690	0.279 359	1.011 999	0.399 942
0.04	1.011 450	0.272 469	1.015 999	0.399 896
0.05	1.014 140	0.265 575	1.019 997	0.399 835
0.06	1.016 761	0.258 679	1.023 995	0.399 760
0.07	1.019 313	0.251 781	1.027 992	0.399 668
0.08	1.021 797	0.244 881	1.031 989	0.399 561
0.09	1.024 211	0.237 979	1.035 984	0.399 437
0.10	1.026 556	0.231 078	1.039 977	0.399 297
0.11	1.028 833	0.224 177	1.043 969	0.399 139

4 结 论

虚拟实验可视化用户界面的应用,可使学生将主要的精力用在力学问题本身,学习将力学问题转化为 Matlab 方便求解的微分方程,并编写相关子函数。利用 Matlab 强大的数值计算能力和图形处理技术,虚拟实验可视化用户界面可以将分析结果以曲线、动画等直观的形式表现出来,提高了对理论力学的感性认识,调动了学生的积极主动性,可更好地达到辅助教学的目的,并为后续课程(如机械原理)、课程设计和毕业设计中的数值仿真作一定知识和方法上的准备。

参考文献:

- [1] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 6版. 北京:高等教育出版社,2005
- [2] 洪嘉振,杨长俊. 理论力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2008
- [3] 彭芳麟,管靖,胡静,等. 理论力学计算机模拟[M]. 北京:清华大学出版社,2002
- [4] 邓旭辉,张平,肖攀. MATLAB 在理论力学教学中的应用[J]. 力学与实践,2006,28(5):82-83
- [5] 李新成. 摆动导杆机构的 Matlab 运动学仿真[J]. 机械研究与应用 2008,21(1):94-96
- [6] 阚文彬,李彤,叶纯杰. MATLAB 在运动学中的应用[J]. 力学与实践,2010,32(3):118-120

Virtual Experiment on the Visualization of Theoretical Mechanics Based on Matlab

AO Wen-gang

(School of Mechanical Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In the process of traditional theoretical mechanics teaching, many problems can only be transiently analyzed and the whole movement process can not be analyzed, furthermore, the solving process has high requirement for the skills in solving the problem. This paper uses powerful numerical computation capacity and graphs processing technique of Matlab to make process analysis of mechanics problems and to display the results by intuitive methods such as the curve, animation and so on for improving the perceptual knowledge of the students.

Key words: Matlab; computer-aided teaching; visualized user interface; double pendulum

责任编辑:李翠薇