

文章编号:1672-058X(2012)09-0029-05

# 一个混沌系统的自适应滑模变结构控制\*

胥红星<sup>1</sup>,孔昭毅<sup>2</sup>

(1. 郑州航空工业管理学院 会计学院, 郑州 450046; 2. 重庆信息职业技术学院, 重庆 404000)

**摘要:**研究了一个混沌系统的控制问题,应用自适应滑模变结构控制的方法将混沌系统的状态渐进稳定到指定的平衡点,该控制律对外界扰动俱有鲁棒性. 数字仿真表明了其控制的有效性.

**关键词:**混沌;控制;变结构

**中图分类号:** O415.5

**文献标志码:** A

混沌是一种复杂的非线性动力学行为,它的基本性质是其对于初值的极端敏感性,一度被认为是不可控和不可预测的. 混沌系统在线性电路、通信、信息科学中的巨大工程应用价值已经被人们所认识. 自从 20 世纪 60 年代 Lorenz<sup>[1]</sup>发现了第一个混沌吸引子以来,很多混沌系统被发现,如 Chen 系统<sup>[2]</sup>、Rossler 系统<sup>[3]</sup>、Chua 系统<sup>[4]</sup>等,并且其复杂的动力学行为已经得到广泛的研究.

1990 年,美国人 Ott、Grebogi 和 Yorke 提出了一种混沌控制到方法—OGY 方法<sup>[5]</sup>,近年来,人们已经提出邦—邦控制<sup>[6]</sup>、神经网络控制<sup>[7]</sup>、反馈控制<sup>[8]</sup>、微分几何控制<sup>[9]</sup>、自适应控制<sup>[10]</sup>等各种控制混沌的方法,但是滑模控制以其具有对参数干扰的强鲁棒性及其算法简单等特点而被广泛应用于控制领域<sup>[11-12]</sup>. 滑模变结构控制与常规控制的根本区别在于控制的不连续性,即一种随系统结构随时变化的开关特性. 在实际工作中,系统不可避免地要受到外界的干扰,由于蝴蝶效应的影响,小的误差可能导致同步性能的严重恶化. 而滑模控制正好能有效地抑制这些影响,使系统对外界变化不灵敏,即具有较强的鲁棒性.

此处研究了一个三维混沌系统<sup>[13]</sup>的控制问题,用滑模变结构方法,找到一簇滑模面,设计了一个控制器,在系统具有不确定外界扰动的情况下,也可将系统控制到任意不稳定的平衡点.

## 1 问题的提出

蔡国梁等人于 2007 年提出如下混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = bx_1 + cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 - hx_3 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $a, b, c, h$  为系统参数,当  $a = 20, b = 14, c = 10.6, h = 2.8$  时,系统的混沌吸引子如图 1 所示. 图 2(a) 为系

收稿日期:2012-04-03;修回日期:2012-04-24.

\* 基金项目:国家自然科学基金青年项目(70901013);郑州航空工业管理学院青年基金项目(2010013004).

作者简介:胥红星(1982-),男,河南商丘人,助教,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

统(1)的 Lyapunov 指数图,系统有一个正的 Lyapunov 指数,则系统是混沌的. 当  $a = 20, b = 14, c = 10.6, h \in [0, 3]$  时,系统(1)的分岔图如图 2(b)所示,均表明该系统具有复杂的动力学行为.

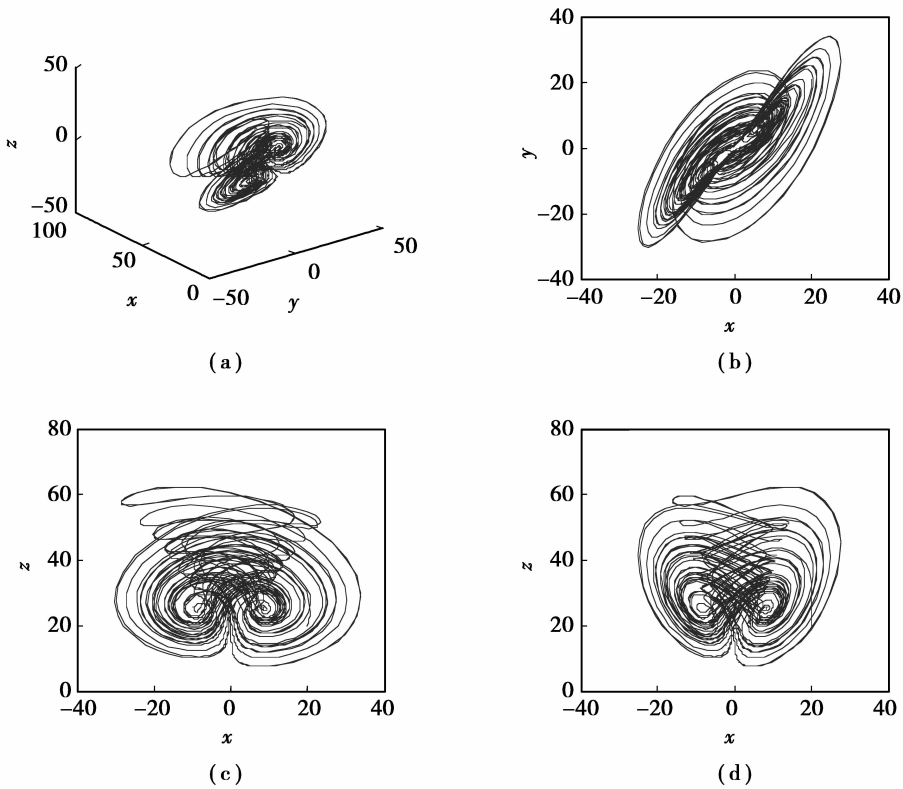


图 1 系统(1)的混沌吸引子

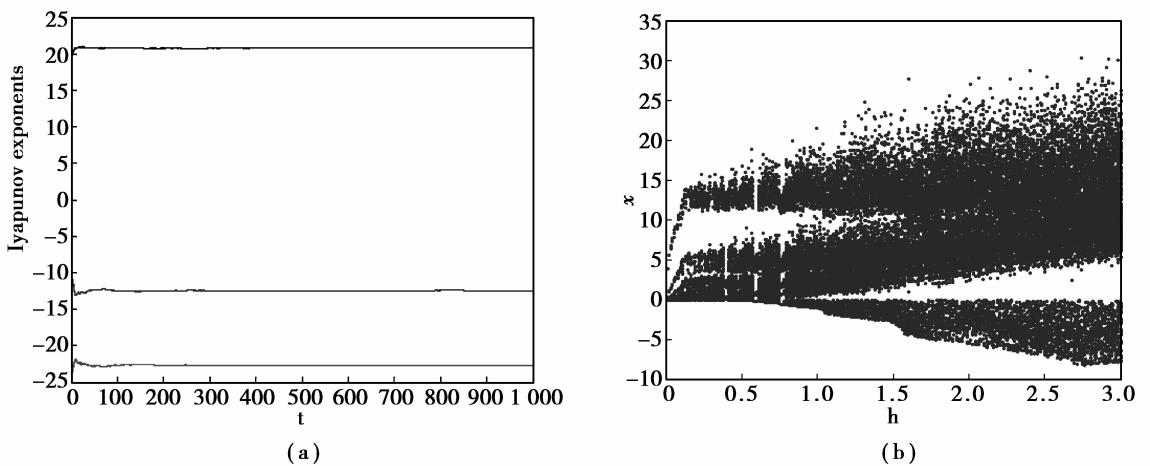


图 2 系统(1)的指数图和分岔图

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 此时系统有如下 3 个平衡点:

$$s_0(0, 0, 0), s_1(8.2994, 8.2994, 24.6), s_2(-8.2994, -8.2994, 24.6)$$

在平衡点  $s_0(0, 0, 0)$  处, 系统(1)的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 14 & 10.6 & 0 \\ 0 & 0 & -2.8 \end{bmatrix}$$

令  $\det(J - \lambda I) = 0$ , 得到其特征值为  $\lambda_1 = -2.8, \lambda_2 = 17.9736, \lambda_3 = -27.3736$ , 因为具有正的特征值, 所以  $s_0(0,0,0)$  是不稳定的.

同理可得系统(1)在  $s_1(8.2994, 8.2994, 24.6), s_2(-8.2994, -8.2994, 24.6)$  处也是不稳定的.

## 2 系统(1)的自适应滑模变结构控制

### 2.1 滑模面的选取

对系统(1)做变换, 令:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

则对其求导得到:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -(a-c)z_2 + a(b+c)z_1 - az_1z_3 \\ \dot{z}_3 = a^2z_1^2 - hz_3 \end{cases} \quad (2)$$

选取滑模面为:

$$S(t) = kz_1 + z_2 = 0 \quad (3)$$

其中  $k > 0, k \in R$ .

对式(3)求导得到:

$$\dot{S}(t) = k\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$$

则由式(2)中第一式得到  $z_2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , 由式(3)得到  $z_1 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . 由式(2)第三式得到  $z_3 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

由上述推理知道, 将  $z_1, z_2$  控制, 则  $z_3$  也就得到了控制.

### 2.2 稳定性分析

对系统(2)施加外界未知有界扰动  $d(t)$  ( $|d(t)| < \sigma$ ) 和控制器  $u(t)$ , 则得到如下方程组:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -(a-c)z_2 + a(b+c)z_1 - az_1z_3 + d(t) + u(t) \\ \dot{z}_3 = a^2z_1^2 - hz_3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{令} \quad u(t) = -a(b+c)z_1 + (a-c-k)z_2 + az_1z_3 + k_s \text{sign}(S) \quad (5)$$

其中  $\dot{k}_s = -r|S|$  为自适应率,  $r \in R^+$ .

**定理1** 当控制器为式(5)时, 可将系统(2)的轨线运动控制到滑模面式(3)上, 然后沿着滑模面运动到原点, 即在控制器(5)的作用下系统(2)的原点渐进稳定, 也就是说系统(1)被控制到了平衡点  $s_0(0,0,0)$ .

证明 根据 Lyapunov 稳定性定理,选取 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2r}(\hat{k} - k_s)^2$$

其中  $\sigma + \hat{k} = \eta < 0$ .

对其求导,得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S(kz_2 + a(b+c)z_1 - (a-c)z_2 - az_1z_3 + d(t) + k_s \operatorname{sign}(S)) + (\hat{k} - k_s) \left( -\frac{1}{r} \dot{k}_s \right) \leq \\ &\sigma |S| + k_s |S| + (\hat{k} - k_s) \left( -\frac{1}{r} \dot{k}_s \right) = \\ &\sigma |S| + k_s |S| + \hat{k} |S| - \hat{k} |S| + (\hat{k} - k_s) \left( -\frac{1}{r} \dot{k}_s \right) = \\ &(\sigma + \hat{k}) |S| + (\hat{k} - k_s) \left( -\frac{1}{r} \dot{k}_s - |S| \right) \end{aligned}$$

因为  $\dot{k}_s = -r |S|$ ,  $\sigma + \hat{k} < 0$ , 所以  $\dot{V} \leq \eta |S|$ ,  $\eta < 0$ , 则得到:

$$S(t) \dot{S}(t) < 0$$

即可达条件满足. 系统(2)的轨线可由控制器和自适应率控制到滑模面.

### 3 数值仿真

取  $d(t) = 0.5 \cos(2\pi t)$ ,  $k = 2$ ,  $r = 1$  时,用 MATLAB 做仿真,系统(2)在平衡点  $s_0(0,0,0)$  处的控制图如图 3 所示. 由图 3 所知,系统的状态逐渐被控制到期望的平衡点,而且控制信号也逐渐收敛到零. 仿真表明控制的有效性. 图 4 所示为控制器  $u(t)$  的时间历程.

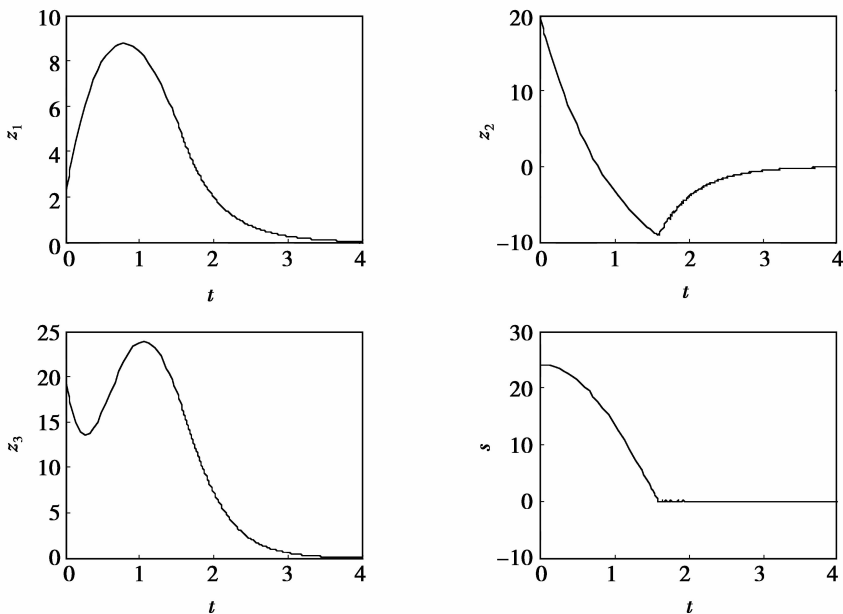


图 3 系统轨线在控制信号下随时间的变化趋势以及滑模面随时间的变化图

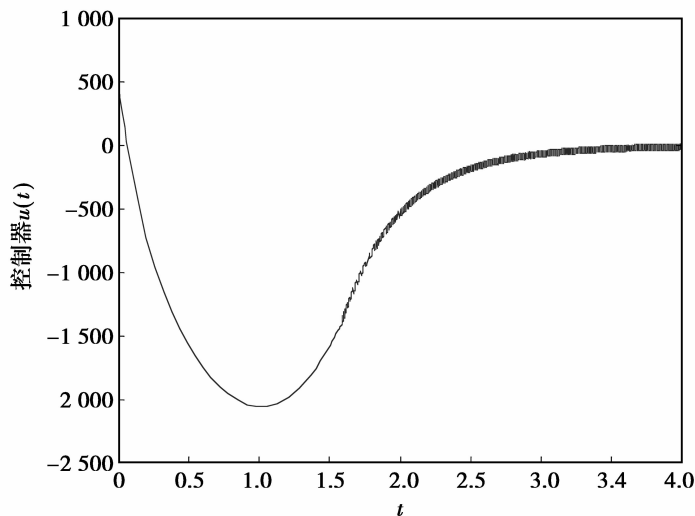


图4 控制器随时间的变化趋势图

## 参考文献:

- [1] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow [J]. Atmospheric Science, 1963, 20(2):130-141
- [2] UETA T, CHEN G. Bifurcation analysis of Chen's equation [J]. Int J Bifurc Chaos, 2000, 10(3):1917-1931
- [3] RAFIKOV M, BALTHAZAR J M. On an optimal control design for Rössler system [J]. Phys Lett A, 2004, 333(3):241-245
- [4] XU W G, SHEN H Z. Impulse tuning of Chua chaos [J]. Int J Eng Sci, 2009, 43(3):275-282
- [5] GREBOGI, YORKE. Controlling Chaos [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(11):1196-1199
- [6] STARRETT J. Control of chaos by occasional bang-bang [J]. Phys Rev E, 2003, 67(11):1196-1199
- [7] MIN X, CAO J D. Synchronization of a chaotic electronic circuit system with cubic term via adaptive feedback control [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14(8):3379-3383
- [8] LIN D Y. Composite nonlinear feedback control for linear singular systems with input saturation [J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(10):528-831
- [9] 韦笃取, 罗晓曙, 方锦清, 等. 基于微分几何方法的永磁同步电动机的混沌运动的控制 [J]. 物理学报, 2006, 55(1):54-59
- [10] CAROLINA A, FRANCISCO G, CARLOS C. Adaptive control design for a boost inverter [J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(1):32-44
- [11] SHEN Q K, ZHANG T P. Novel design of adaptive neural network controller for a class of non-affine nonlinear systems [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17(3):1107-1116
- [12] 舒永录, 孔昭毅. 一个新混沌系统的滑膜变结构控制 [J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2010, 27(1):1-5
- [13] 蔡国梁, 谭振海, 周维怀, 等. 一个新混沌系统的动力学分析及混沌控制 [J]. 物理学报. 2007, 56(11):6230-6237

## Adaptive Sliding Mode Variable Structure Control of a Chaotic System

XU Hong-xing<sup>1</sup>, KONG Zhao-yi<sup>2</sup>

(1. School of Accounting, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450046, China;

2. Chongqing Information Technology College, Chongqing 404000, China)

**Abstract:** This paper studied the issue of controlling of a chaotic system. A adaptive sliding mode variable structure control scheme is designed to control the system from asymptotic stability of all states to given equilibrium points, the control scheme is robust for outer perturbation. Numerical simulation illustrates the effectiveness of the proposed adaptive sliding mode variable structure control scheme.

**Key words:** chaos; control; variable structure