文章编号:1672－058X(2012)09－0022－07

随机利率下权益指数年金的定价*

曹兵兵,郭峰涛
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘　要:在随机利率的条件下,当股票价格服从对数正态分布时,利用 Martingale Pricing 方法推导出了简单点对点法和年度重设法下权益指数年金的定价公式,并就随机利率的波动率、股价波动率、递延期间对均衡参与率的影响程度进行了敏感度分析。

关键词: 随机利率;风险中性定价;参与率;等价鞅测度;Girsanov 定理
中图分类号:F831.5　　　　**文献标志码:**A

0　引　言

权益指数年金(Equity Indexed Annuities,以下简称 EIA)于 20 世纪 90 年代中期开始在欧美市场出现,自产品推出以来受到消费者的普遍欢迎。从 1996 年到 2000 年 EIA 的年销售额分别为 15 亿美元、30 亿美元、41 亿美元、52 亿美元、60 亿美元[1]。权益指数年金之所以能在推出以来获得如此快速发展,是因为它与传统年金相比有如下特点:这类年金是一种递延年金,并且有着最低收益保证,在最小保证基础上年金实际支付给保户的收益率与预先规定好的某类股票或债券指数收益相连[2]。也就是说,当证券市场景气,股指收益高的时候,这类年金支付给保户的利率以股指收益的一定比例支付;当资本市场不景气,股指收益低时,因为保单持有人有最低收益保证,故以前的本利和不受损失。因此,EIA 深受风险承受能力不高,又希望参与市场成长的客户喜爱。

从上述介绍可以得知,EIA 的收益率与相关联的股价指数收益有关,因此在产品的设计中增加了指数收益率的计算公式。常见的计算指数收益率的方法有:简单点对点法、高水档回试法和年度重设法[3]。

由于 EIA 有最低收益保证,所以保单持有人不能 100% 的参与股指的增长,而是有一定的参与比率,这个比率就是参与率。在以往的 EIA 研究中,往往是在无风险利率的条件下进行的,这样在很大程度上不能完全、准确地对现实生活中的 EIA 进行合理定价。此处是在 Serena Tiong[4] 的研究基础上,考虑在随机利率条件下 EIA 的定价研究,并给出了在简单点对点法和年度重设法下权益指数年金的定价公式。

收稿日期:2012－02－29;修回日期:2012－04－05.
* 基金项目:中央高校基本科研业务费资助(CDJXS11100048).
作者简介:曹兵兵(1985-),女,河南濮阳人,硕士研究生,从事保险定价方面的研究.

1　模型假设及概率测度转换

1.1　模型假设

假设在有效且无摩擦的市场及带流的概率空间$(\Omega,F,P,(F_t)_{0\leqslant t\leqslant T})$中有两种资产:一种为无风险资产,称为债券或银行存款,其价格满足方程

$$dB_t = \mu_1(t)B_t dt + \sigma_1(t)B_t dW_p^1(t) \tag{1}$$

$B_t = B(t,T)$表示 T 时刻到期的零息票债券在时刻 t 的价格;同时,定义 $b_t = b(t,\tau)$表示 τ 时刻到期的零息票债券在时刻 t 的价格,$B_T = b_\tau = 1$,$B_\tau = \dfrac{B_t}{b_t}(0\leqslant t\leqslant \tau)$;另一种资产是股票,其价格满足方程

$$dS_t = (\mu_2(t) - \delta(t))S_t dt + \sigma_2(t)S_t dW_p^2(t) \tag{2}$$

S_t 表示股票在 t 时刻的价格,并且有 $S_t = S_0 e^{Y(t)}$,$\mu_i(t)$,$\sigma_i(t)$,$\delta(t)$均为时间 t 的非随机函数,且满足可积条件:

$$\int_0^T \mu_i(t)dt < \infty, \int_0^T \sigma_i^2(t)dt < \infty \quad (i = 1,2)$$

$\delta(t)$表示红利率,$W_p^1(t)$,$W_p^2(t)$表示在测度 P 下的标准布朗运动,且相互独立。

1.2　概率测度转换

令 $Z_t = \dfrac{S_t}{B_t}$,将 Ito 公式[5]作用于$\dfrac{S_t}{B_t}$,并结合公式(1)(2),有:

$$dZ_t = Z_t\{[\mu_2(t) - \mu_1(t) - \delta(t) + \sigma_1^2(t)]dt + \sigma_2(t)dW_p^2(t) - \sigma_1(t)dW_p^1(t)\}$$

令 $W_p(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sigma_2(s)dW_p^2(s) - \sigma_1(s)dW_p^1(s)}{\Delta(s)}ds$,其中 $\Delta(t) = \sqrt{\sigma_2^2(t) + \sigma_1^2(t)}$,有:

$$dZ_t = Z_t\{[\mu_2(t) - \mu_1(t) - \delta(t) + \sigma_1^2(t)]dt + \Delta(t)dW_p(t)\}$$

根据风险中性测度定理[6],可以得到测度 P 的等价鞅测度 Q,并且有:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt - \int_0^T \theta_t W_p(t)\right]$$

其中,$\theta_t = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t) + \sigma_1^2(t)}{\Delta(t)}$,这里 θ_t 是时间 t 的非随机函数,且:

$$E_p \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) < \infty$$

由 Girsanov 定理[5]知:$W_Q(t) = W_p(t) + \displaystyle\int_0^t \theta_s ds$,显然 $W_Q(t)$是在测度 Q 下的标准布朗运动,此时有:

$$dZ_t = Z_t[-\delta(t)dt + \Delta(t)dW_Q(t)]$$

2　权益指数年金的定价

此处主要是利用鞅定价的方法考虑在随机利率条件下有股利分配时,权益指数年金的定价公式。假定权益指数年金为趸交保费型且缴费额为 1,不考虑手续费、管理费等其他附加费用,参与率为 α,递延期间为 T,最低保证利率为 g。

为方便起见,先约定一些符号,用

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

来表示标准正态分布函数,P_Q,P_R 分别表示在测度 Q,R 下的概率。

2.1 简单点对点法下权益指数年金的定价

在简单点对点法下,EIA 的定价公式如下:

$$p = B_0 E_Q[\max(e^{\alpha Y(T)}, e^{gT})] = B_0 E_Q\left[\max\left(\frac{S_T^\alpha}{S_0^\alpha}, e^{gT}\right)\right] =$$

$$B_0\left\{\frac{1}{S_0^\alpha}E_Q[S_T^\alpha \cdot I(S_T > S_0 e^{\frac{gT}{\alpha}})] + e^{gT}E_Q[I(S_T \leqslant S_0 e^{\frac{gT}{\alpha}})]\right\}$$

其中 $I(A)$ 为示性函数,即当事件 A 发生时为 1,不发生时为 0。

因为

$$E_Q[S_T^\alpha \cdot I(S_T > S_0 e^{\frac{gT}{\alpha}})] =$$

$$E_Q\left\{Z_0^\alpha \exp\left[-\alpha\int_0^T\delta(t)dt - \frac{1}{2}\alpha\int_0^T\Delta^2(t)dt + \alpha\int_0^T\Delta(t)dW_Q(t)\right]\cdot I(S_T > S_0 e^{\frac{gT}{\alpha}})\right\}$$

再定义测度 R,满足:

$$\frac{dR}{dQ} = \exp[\alpha\int_0^T\Delta(t)dW_Q(t) - \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^T\Delta^2(t)dt]$$

由 Girsanov 定理可知,测度 R 是测度 Q 的等价鞅测度,且

$$W_R(t) = W_Q(t) - \alpha\int_0^t\Delta(s)ds$$

其中 $W_R(t)$ 是在测度 R 下的标准布朗运动,并有

$$Z_T = Z_0\exp\left[-\int_0^T\delta(t)dt + \left(\alpha - \frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)dt + \int_0^T\Delta(t)dW_R(t)\right)\right]$$

所以:

$$E_Q[S_T^\alpha \cdot I(S_T > S_0 e^{gT})] = \alpha_1 \cdot e_R[I(S_T > S_0 e^{gT})] = \alpha_1 \cdot P_R(S_T > S_0 e^{gT}) =$$

$$\alpha_1 \cdot P_R\left[\frac{\int_0^T(\sigma_2(t) - \sigma_1(t))dW_R(t)}{\sqrt{\int_0^T(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))^2dt}} > \alpha_2\right] = \alpha_1 \cdot \Phi(-\alpha_2)$$

其中,

$$\alpha_1 = Z_0^\alpha\exp\left[-\alpha\int_0^T\delta(t)dt + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)\int_0^T\Delta^2(t)dt\right]$$

$$\alpha_2 = \frac{\ln B_0 + \frac{gT}{\alpha} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\int_0^T\Delta^2(t)dt + \int_0^T\delta(t)dt}{\sqrt{\int_0^T\Delta^2(t)dt}}$$

$$E_Q[I(S_T \leqslant S_0 e^{gT/\alpha})] = P_Q(Z_T \leqslant S_0 e^{gT/\alpha}) =$$

$$P_Q\left[\frac{\int_0^T \Delta(t)\,\mathrm{d}W_Q(t)}{\sqrt{\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t}} \leqslant \frac{\ln B_0 + \dfrac{gT}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t}}\right] = \Phi(a_3)$$

其中, $\alpha_3 = \dfrac{\ln B_0 + \dfrac{gT}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \delta(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t}}$

定理 1　在随机利率下,采用简单点对点法时权益指数年金的定价公式为:

$$p = B_0\left\{B_0^{-\alpha}\cdot \exp\left[-\alpha\int_0^T \delta(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\int_0^T \Delta^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\Phi(-a_2) + \mathrm{e}^{gT}\Phi(a_3)\right\}$$

假设 $\mu_1(t)=r,\sigma_1(t)=\sigma_1,\delta(t)=\delta,\sigma_2(t)=\sigma_2$ 都为常数,且 $B_0 = \mathrm{e}^{-(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T}$,可以得到:

表 1　简单点对点法下 EIA 的定价

$g=0.03,T=5$						
σ_2	σ_1	δ	$r=0.04$	$r=0.05$	$r=0.06$	$r=0.07$
0.2	0	0.01	0.527 9	0.691	0.798 6	0.873 1
		0.02	0.575 1	0.754 5	0.870 7	0.948 9
	0.1	0.01	0.378 3	0.583 3	0.713 3	0.804 1
		0.02	0.406 9	0.632 2	0.773 0	0.869 5
0.3	0	0.01	0.419 6	0.569 0	0.6752	0.754 5
		0.02	0.446 6	0.606 9	0.719 5	0.802 5
	0.1	0.01	0.305 0	0.488 7	0.612 3	0.703 4
		0.02	0.322 3	0.519 7	0.651 2	0.747 0

从表 1 中很容易看出,随着波动率 σ_1 和 σ_2 的增大,均衡参与率不断变小;当 δ 和 r 增大时,均衡参与率不断变大。

推论 1　作为定理 1 的特殊情形,当市场无风险利率 $r(t)$,股价波动率 $\sigma(t)$,连续股利率 $\delta(t)$,均为时间的非随机函数时(这里为了简化计算,取常数 $r(t)=r,\sigma(t)=\sigma,\delta(t)=\delta$),可以得出此时权益指数年金的定价公式:

$$p = \mathrm{e}^{-rT}\left[\mathrm{e}^{r\alpha T-\alpha\delta T+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2 T}\cdot\Phi\left(\frac{\left(r-\dfrac{g}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\sigma^2+\alpha\sigma^2-\delta\right)\sqrt{T}}{\sigma}\right)+\mathrm{e}^{gT}\Phi\left(\frac{\left(\dfrac{g}{\alpha}-r+\dfrac{1}{2}\sigma^2+\delta\right)\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right]$$

2.2　年度重设法下权益指数年金的定价

在年度重设法下,为了计算方便,假设有 $W_p^1(t) = W_p^2(t) = W_p(t)$,权益指数年金的定价公式推导过程与上边相似,只给出具体结论。

定理 2　在随机利率下,采用年度重设法时权益指数年金的定价公式:

$$p = B_0\cdot\prod_{i=1}^{T}\left\{\mathrm{e}^{b(i)}\cdot\Phi\left(-\alpha(i)+\alpha\sqrt{\int_{i-1}^{i}\sigma_2^2(t)\,\mathrm{d}t}\right)+\mathrm{e}^{g}\cdot\Phi(\alpha(i))\right\}$$

其中,

$$\alpha(i)=\frac{\frac{g}{\alpha}-\int_{i-1}^{i}\left[\mu_2(t)-\delta(t)-\frac{1}{2}\sigma_2^2(t)+\sigma_1(t)\sigma_2(t)-\frac{\sigma_2(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))}{\sigma_2(t)-\sigma(t)_1}\right]\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_{i-1}^{i}\sigma_2^2(t)\mathrm{d}t}}=$$

$$\frac{\frac{g}{\alpha}-\int_{i-1}^{i}\left[r(t)-\delta(t)-\frac{1}{2}\sigma_2^2(t)+\sigma_1(t)\sigma_2(t)\right]\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_{i-1}^{i}\sigma_2^2(t)\mathrm{d}t}}$$

$$b(i)=\alpha\int_{i-1}^{i}\left[r(t)-\delta(t)-\frac{1}{2}\sigma_2^2(t)+\sigma_1(t)\sigma_2(t)\right]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha^2\int_{i-1}^{i}\sigma_2^2(t)\mathrm{d}t(i=1,2,\cdots,T)$$

同上边假设一样,$\mu_1(t)=r,\sigma_1(t)=\sigma_1,\delta(t)=\delta,\sigma_2(t)=\sigma_2$ 都为常数,且 $B_0=\mathrm{e}^{-(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T}$,可以得到:

表 2 年度重设法下 EIA 的定价

$g=0.03,T=5$						
σ_2	σ_1	δ	$r=0.04$	$r=0.05$	$r=0.06$	$r=0.07$
0.2	0	0.01	0.258 9	0.363 7	0.456 3	0.531 6
		0.02	0.269 8	0.384 3	0.477 8	0.556 9
	0.1	0.01	0.174 8	0.284 9	0.370 8	0.443 2
		0.02	0.181 0	0.296 8	0.387 1	0.463 0
0.3	0	0.01	0.187 6	0.272 4	0.344 9	0.408 7
		0.02	0.193 1	0.281 2	0.356 3	0.422 4
	0.1	0.01	0.125 0	0.209 3	0.277 9	0.338 0
		0.02	0.128 1	0.215 5	0.286 5	0.348 7

推论 2 作为定理 2 的特殊情形,当市场无风险利率 $r(t)=r$,股价波动率 $\sigma(t)=\sigma$,连续股利率 $\delta(t)=\delta$ 均为常数时,可以得出此时权益指数年金的定价公式:

$$p=\mathrm{e}^{-rT}\left[\mathrm{e}^{\alpha\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}\Phi\left(\frac{r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2-\frac{g}{\alpha}+\alpha\sigma^2}{\sigma}\right)+\mathrm{e}^{g}\Phi\left(\frac{\frac{g}{\alpha}-\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right)\right]^T$$

3 敏感度分析

在这里将分别分析随机利率的波动率 σ_1、股价波动率 σ_2、递延期间 T 对均衡参与率的影响程度。

(1) 从图 1 可以看出,随着随机利率波动率的增加,均衡参与率下降。这是因为随机利率的波动率越大,保险公司所承受的风险越大,所以相应的参与率就低。

(2) 从图 2 可以看出,随着股指波动率的增加,均衡参与率下降。这与上边的分析一样,因为股指波动率越大,保险公司所承受的风险也越大,所以相应的参与率就低。

(3) 从图 3 可以看出,随着递延期间的增大,均衡参与率也不断增大;这是因为到期日的增加,一方面会减少保险公司的保证成本,另一方面保险公司可以获得更多的投资资金,保险公司持有此类资产的收益也

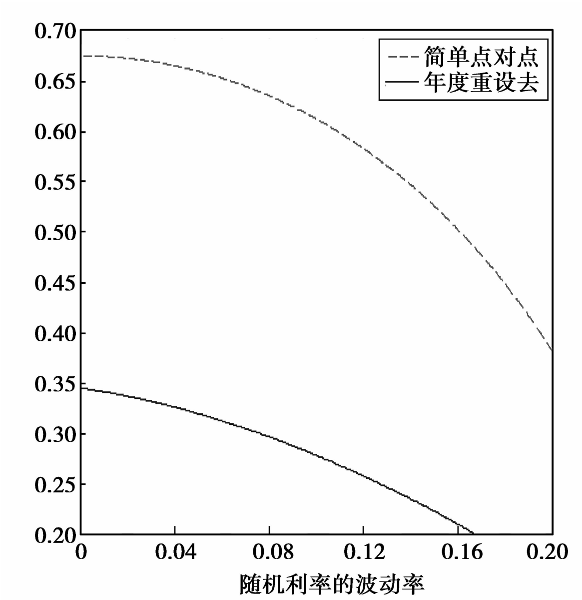

图 1　随机利率的波动率对参与率的影响

$\delta=0.01, r=0.06, g=0.03, T=5, \sigma_2=0.3$

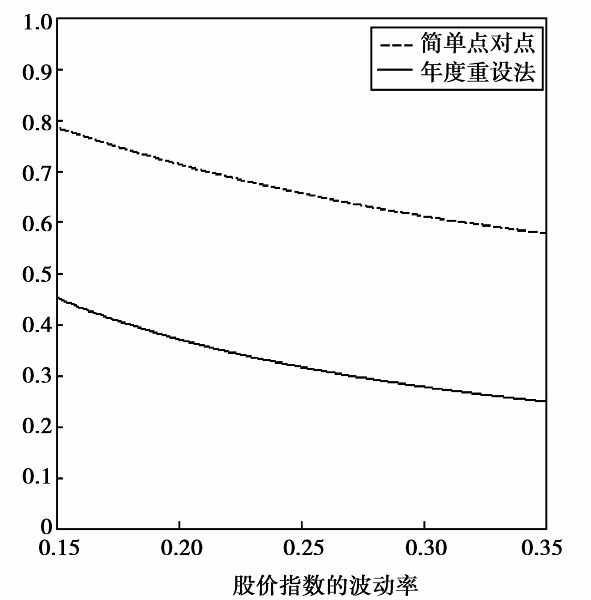

图 2　股价波动率对参与率的影响

$\delta=0.01, r=0.06, g=0.03, T=5, \sigma_1=0.1$

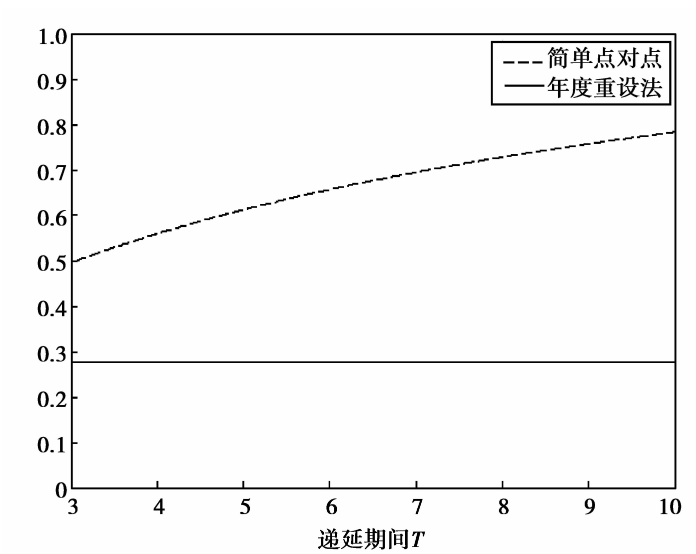

图 3　递延期间对参与率的影响

$\delta=0.01, r=0.06, g=0.03, \sigma_2=0.3, \sigma_1=0.1$

越大。而年度重设法下均衡参与率几乎不随递延期间的增加而变化,这是因为年度重设法下受益率每年都计算,所以递延期间的长短对参与率影响不大。

从图形中可以很容易得出,在简单点对点法下均衡参与率高于在年度重设法下的权益指数年金的参与率,也就是说,当采用简单点对点法计算权益指数年金时,往往比采用年度重设法时对投资者更有利。

参考文献:

[1] HARRISON J M. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems [M]. New York: Wiley, 1985

[2] FANG M CH. Commercial Annuity Insurance [M]. Taiwan fengjia University Insurance Department, 2003

[3] 陈松男.金融工程学[M].上海:复旦大学出版社,2002

[4] TIONG S. Valuing Equity Indexed Annuities [J]. North American Actuarial Journal,2000,4(4):149-163

[5] 史蒂文·E施里夫.金融随机分析(2卷)[M].上海:上海财经大学出版社,2008

[6] BINGHAM N H,KIESEL R. Risk-Neutral Valuation:Pricing and Hedging of Financial Derivatives [M]. New York:Springer-Verlag,1998

Pricing of Equity Indexed Annuities under Stochastic Interest Rate

CAO Bing-bing, GUO Feng-tao

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Under the condition of stochastic interest rate, when stock prices follow logarithm normal distribution, Martingale Pricing method is used to derive the equity indexed annuities pricing formula under the law of simple point-to-point method and annual re-try method. Also, sensitivity analysis is carried out for the impact of stochastic interest rate volatility, stock price volatility and deferred period on balanced participation rate.

Key words: stochastic interest rate; risk-neutral pricing; participation rate; equivalent martingale measure; Girsanov Theorem

责任编辑:李翠薇

(上接第7页)

On Pell Equation $px^2 - (pn \pm 2)y^2 = \pm 1$ ($p \equiv -1, \pm 3 \pmod 8$, p is a prime factor)

DU Xian-cun[1], HUANG Mei[2], ZHAO Jin-e[3]

(1. School of Teacher Education, Honghe University, Yunnan Mengzi 661100, China;

2. Department of Mathematics, Yuxi Normal University, Yunnan Yuxi 631100, China;

3. Department of Mathematics, Honghe University, Yunnan Mengzi 661100, China)

Abstract: The solubility of Pell equation $ax^2 - by^2 = \pm 1$ ($a, b \in Z^+$, ab is a non-square positive integer) is a very meaningful question. In this paper, by applying related knowledge of Legendre sign and nature of congruence, it works out six conclusions to judge that the sets of Pell equations such as $px^2 - (pn \pm 2)y^2 = \pm 1$ ($p \equiv -1, \pm 3 \pmod 8$, and p is a prime number) have not positive integer solutions. These conclusions play an important role in the research on restricted Pell equation $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ (D is a non-square positive integer).

Key words: Pell Equation; positive integer solution; prime number; congruence

责任编辑:李翠薇