文章编号:1672 - 058X(2012)09 - 0014 - 04

含一个割点的连通图的最小特征值

郭 欢
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘 要:一个图的无符号拉普拉斯最小特征值在某个图类中的所有图中达到最大时常称为极大图;通过利用特征向量方程研究特征值的方法,对只含有一个割点的连通图的无符号拉普拉斯最小特征值进行了研究,且得到了最小特征值的值,从而得到了只含有一个割点的具有相同阶数的所有的连通图中最小特征值的极大值,并且刻画了最小特征值取到极大值时所对应的极大图的结构.

关键词: 连通图;割点;无符号拉普拉斯;最小特征值

中图分类号:O157.6 **文献标志码:**A

1 预备知识

设 G 是 n 阶简单连通图,其顶点集为 $V=V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,边集为 $E=E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,$N_{G(v)}$ 表示顶点 v 在图 G 中的邻点的集合,$N_{G(v)}$ 中所含点的个数称为顶点 v 的度数,记为 d_v.

只含一个顶点的图称为平凡图,否则称为非平凡图. 若 G 中任何两个不同的点都是邻接的,则称 G 为完全图. 若 v 是非平凡图 G 的一个顶点,则 $G-v$ 表示 G 的一个子图,其顶点集是由除去 v 之外的 G 的所有顶点构成,边集是由除去与 v 关联的边之外的 G 的所有边构成.

若 e 是图 G 的一条边,则 $G-e$ 表示 G 的一个子图,其顶点集是由 G 的所有顶点构成,边集是由除去 e 之外的 G 的所有边构成. 设 v 是非平凡图 G 的一个顶点,若图 $G-v$ 是不连通的,则称 v 是 G 的一个割点.

图 G 的邻接矩阵为 n 阶矩阵 $A=A(G)=[a_{ij}]$,其中,当 v_i 与 v_j 邻接时,$a_{ij}=1$;否则,$a_{ij}=0$. 图 G 的度对角矩 $D=D(G)=\mathrm{diag}\{d_{v_1},d_{v_2},\cdots,d_{v_n}\}$. 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵定义为:$Q=Q(G)=D+A$. 显然,矩阵 Q 是非负,对称,半正定的,因此它的 n 个特征值均为非负实数,将其排序为:$\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(G)\geqslant 0$,其中 $\lambda_n(G)$ 称为图 G 的无符号拉普拉斯矩阵的最小特征值,为方便起见,用 $\lambda_{\min}(G)$ 来表示 $\lambda_n(G)$.

设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$,$G$ 是一个顶点集是 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的图,x 可以看做是定义在 V 上的函数,即将顶点 v_i 映射到 $x_i=x_{v_i}$,常称 x_i 是向量 x 在顶点 v_i 上的赋值. 因此,二次型 $x^{\mathrm{T}}Q(G)x$ 可以写成:

$$x^{\mathrm{T}}Q(G)x = \sum_{uv\in E(G)}(x_u+x_v)^2$$

若 x 是图 G 中对应于特征值 λ 的特征向量,则 $Qx=\lambda x$ 可以写成:

$$(\lambda-d_v)x_v = \sum_{u\in N_{G(v)}} x_u$$

其中,$N_{G(v)}$ 表示顶点 v 在图 G 中的邻点的集合,常称该方程为图 G 的特征向量方程.

收稿日期:2012 - 02 - 11;**修回日期:**2012 - 03 - 07.

作者简介:郭欢(1984-),女,河南温县人,硕士研究生,从事代数图论及其应用研究.

2　含一个割点的连通图的无符号拉普拉斯最小特征值的极大图

定义 1　设图 G_1 和 G_2 是两个不相交的连通图,其中,$u \in G_1$,$v \in G_2$,则将图 G_1 中的点 u 和 G_2 中的点 v 粘到一起,形成一个新的点,称其为图 G_1 和 G_2 的粘合,记作 $G_1(u) \cdot G_2(v)$,如图 1 所示:

为方便起见,将完全图 K_p 和 K_q 的粘合 $K_p(u) \cdot K_q(v)$,记为 $G(p,q)$,其中,$u \in K_p$,$v \in K_q$,$p \geqslant 2$,$q \geqslant 3$,$p+q=n+1$.

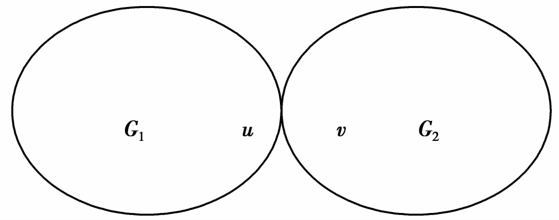

图 1　G_1 和 G_2 的粘合 $G_1(u) \cdot G_2(v)$

用 ζ_n 来表示只含有一个割点的所有 n 阶连通图的集合,下面将刻画 ζ_n 中极大图的结构.

引理 1[2]　设 G 是 n 阶连通图,e 是图 G 的边,图 G 的无符号拉普拉斯特征值排序为 $0 \leqslant \lambda_n(G) \leqslant \lambda_{n-1}(G) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(G)$,则

$$0 \leqslant \lambda_n(G-e) \leqslant \lambda_n(G) \leqslant \lambda_{n-1}(G-e) \leqslant \lambda_{n-1}(G) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(G-e) \leqslant \lambda_1(G)$$

引理 2[5]　设 G 是含有一个悬挂点的非平凡 n 阶连通图,则

$$0 < \lambda_{\min}(G) < 1$$

引理 3　设 $G(p,q)$ 是 n 阶连通图 $(p \geqslant 2, q \geqslant 3, p+q=n+1)$,则 $G(p,q)$ 的无符号拉普拉斯特征多项式是 $f(p,q,\lambda)=g(p,q,\lambda)(\lambda-p+2)^{p-2}(\lambda-q+2)^{q-2}$,其中,$g(p,q,\lambda)=-\lambda^3+(3p+3q-8)\lambda^2+(-2p^2-8pq+17p-2q^2+17q-23)\lambda+4p^2q-6p^2+4pq^2-24pq+26p-6q^2+26q-24$.

证明　设 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是图 $G(p,q)$ 的顶点集,其中,连通分支 K_p 的 p 个顶点,按逆时针方向依次是 v_1,v_2,$\cdots$,v_p;连通分支 K_q 的 q 个顶点,按顺时针方向依次是 v_p,v_{p+1},$\cdots$,v_{p+q-1} 且 $p+q=n+1$.

设 $x \in R^n$ 是 $G(p,q)$ 中,对应于特征值 λ 的特征向量,则由特征向量方程,得到:

$$\begin{cases}(\lambda-p+1)x_1=x_2+x_3+x_4+\cdots+x_p\\(\lambda-p+1)x_2=x_1+x_3+x_4+\cdots+x_p\\\vdots\\(\lambda-p+1)x_{p-1}=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{p-2}+x_p\\(\lambda-p-q+2)x_p=x_1+x_2+\cdots+x_{p-1}+x_{p+1}+x_{p+2}+\cdots+x_{p+q-1}\\(\lambda-q+1)x_{p+1}=x_p+x_{p+2}+x_{p+3}+\cdots+x_{p+q-1}\\(\lambda-q+1)x_{p+2}=x_p+x_{p+1}+x_{p+3}+\cdots+x_{p+q-1}\\\vdots\\(\lambda-q+1)x_{p+q-2}=x_p+x_{p+1}+\cdots+x_{p+q-3}+x_{p+q-1}\\(\lambda-q+1)x_{p+q-1}=x_p+x_{p+1}+\cdots+x_{p+q-3}+x_{p+q-2}\end{cases} \tag{1}$$

将方程组(1)的前两个方程做差得$(\lambda-p+2)(x_1-x_2)=0$,故当 $\lambda \neq p-2$ 时,有 $x_1=x_2$;同理,对于方程组的前 $p-1$ 项,当 $\lambda \neq p-2$ 时,有 $x_1=x_2=\cdots=x_{p-1}$;将方程组的第 $p+1$ 项与第 $p+2$ 项做差得$(\lambda-q+2)(x_{p+1}-x_{p+2})=0$,故当 $\lambda \neq q-2$ 时,有 $x_{p+1}=x_{p+2}$;同理,对于方程组的后 $q-1$ 项,当 $\lambda \neq q-2$ 时,有 $x_{p+1}=x_{p+2}=\cdots=x_{p+q-1}$.

所以,当 $\lambda \neq p-2$ 且 $\lambda \neq q-2$ 时,有 $x_1=x_2=\cdots=x_{p-1}$,$x_{p+1}=x_{p+2}=\cdots=x_{p+q-1}$,令 $x_1=x_2=\cdots=x_{p-1}=:X_1$,$x_{p+1}=x_{p+2}=\cdots=x_{p+q-1}=:X_2$,$x_p=:X_3$,则由特征向量方程得:

$$\begin{cases}(\lambda-p+1)X_1=(p-2)X_1+X_3\\(\lambda-q+1)X_2=(q-2)X_2+X_3\\(\lambda-p-q+2)X_3=(p-1)X_1+(q-1)X_2\end{cases}\tag{2}$$

将方程组(2)移项整理得:

$$\begin{cases}(\lambda-2p+3)X_1-X_3=0\\(\lambda-2q+3)X_2-X_3=0\\(p-1)X_1+(q-1)X_2-(\lambda-p-q+2)X_3=0\end{cases}\tag{3}$$

由于方程组有非零解,故其系数矩阵行列式为零,即:

$$\begin{vmatrix}\lambda-2p+3 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2q+3 & -1\\ p-1 & q-1 & -\lambda+p+q-2\end{vmatrix}=0$$

解得:$-\lambda^3+(3p+3q-8)\lambda^2+(-2p^2-8pq+17p-2q^2+17q-23)\lambda+4p^2q-6p^2+4pq^2-24pq+26p-6q^2+26q-24=0$.

因此,特征多项式 $f(p,q,\lambda)$ 的因式为 $\lambda-p+2$, $\lambda-q+2$, $g(p,q,\lambda)$,其中,$g(p,q,\lambda)=-\lambda^3+(3p+3q-8)\lambda^2+(-2p^2-8pq+17p-2q^2+17q-23)\lambda+4p^2q-6p^2+4pq^2-24pq+26p-6q^2+26q-24$.

下面证明 $g(p,q,\lambda)$, $\lambda-p+2$, $\lambda-q+2$ 的重数分别是 $1, p-2, q-2$. 不妨设它们的重数分别是 n_1, n_2, n_3,则易知 $n_1\geqslant 1$,特征值 $p-2, q-2$ 的重数分别是 n_2, n_3. 对于特征值 $p-2$,可以构造 $p-2$ 个线性无关的特征向量,即 $x_1=(1,-1,0,0,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $x_2=(1,0,-1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $\cdots$, $x_{p-2}=(1,0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$,则易知 $n_2\geqslant p-2$;同理,对于特征值 $q-2$,可构造 $q-2$ 个线性无关的特征向量,即 $y_1=(0,\cdots,0,1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $y_2=(0,\cdots,0,1,0,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $\cdots$, $y_{q-2}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,-1,0)^{\mathrm T}$,其中分量 1 均处于向量 $y_1, y_2,\cdots,y_{q-2}$ 中的第 p 项,则易知 $n_3\geqslant q-2$. 因此 $3n_1+n_2+n_3=n$, $p+q=n+1$, $n_1\geqslant 1$, $n_2\geqslant p-2$, $n_3\geqslant q-2$. 解得 $n_1=1$, $n_2=p-2$, $n_3=q-2$,证毕.

定理 1 设 $G(p,q)$ 是 n 阶连通图,其中,$q\geqslant p\geqslant 3$, $p+q=n+1$,则 $G(p,q)$ 的无符号拉普拉斯最小特征值 $\lambda_{\min}(G(p,q))$ 是 $p-2$.

证明 由引理 3 知,图 $G(p,q)$ 的无符号拉普拉斯特征多项式是 $f(p,q,\lambda)=g(p,q,\lambda)(\lambda-p+2)^{p-2}(\lambda-q+2)^{q-2}$,其中 $g(p,q,\lambda)=-\lambda^3+(3p+3q-8)\lambda^2+(-2p^2-8pq+17p-2q^2++17q-23)\lambda+4p^2q-6p^2+4pq^2-24pq+26p-6q^2+26q-24$,则由方程 $g(p,q,\lambda)=0$,得到:

$$\begin{cases}\lambda_1=p+q-\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{4p^2-8pq+4p+4q^2+4q-7}}{2}\\\lambda_2=p+q-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{4p^2-8pq+4p+4q^2+4q-7}}{2}\\\lambda_3=p+q-3\end{cases}$$

易知 $\lambda_1<\lambda_2$, $\lambda_1<\lambda_3$,由 $3\leqslant p\leqslant q$ 知,$p-2\leqslant q-2$,则

$$\lambda_1-(p-2)=\frac{2q-1-\sqrt{4p^2-8pq+4p+4q^2+4q-7}}{2}$$

由于 $q\geqslant p\geqslant 3$,则得 $p-1>0$, $q-2>0$, $q-p\geqslant 0$, $2q-1>0$,因此,$(2q-1)^2-(4p^2-8pq+4p+4q^2+4q-7)=4(p-1)[(q-2)+(q-p)]>0$,易知 $2q-1-\sqrt{4p^2-8pq+4p+4q^2+4q-7}>0$,故 $\lambda_1-(p-2)>0$,即 $p-2<\lambda_1$. 综上可知,$\lambda_{\min}(G(p,q))=p-2$. 证毕.

定理 2 若设图 $\tilde G$ 是 ζ_n 中的极大图,则当 n 是奇数时,$\tilde G=G\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right],\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$;当 n 是偶数时,$\tilde G=$

$G\left(\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n+2}{2}\right]\right)$.

证明　由于 $\tilde{G}$ 是 ζ_n 中的极大图,则由引理 1 知,$\tilde{G}$ 是由完全图 K_p 和 K_q 粘合而成的 $G(p,q)$,其中,$p\geqslant 2$,$q\geqslant 3$,$p+q=n+1$. 当 $p=2$,$q\geqslant 3$ 时,图 $G(p,q)$ 中含有一个悬挂点,由引理 2 知,$0<\lambda_{\min}(G(p,q))<1$;当 $q\geqslant p\geqslant 3$ 时,由定理 1 知,图 $G(p,q)$ 的无符号拉普拉斯最小特征值 $\lambda_{\min}(G(p,q))$ 是 $p-2>1$. 故极大图在 $q\geqslant p\geqslant 3$ 的情形下得到,而 $p-2$ 随着 p 的增大而增大,且由于 $p\leqslant q$,$p+q=n+1$,故当 n 是奇数时,$p=\left[\frac{n+1}{2}\right]$,$q=\left[\frac{n+1}{2}\right]$;当 n 是偶数时,$p=\left[\frac{n}{2}\right]$,$q=\left[\frac{n+2}{2}\right]$. 证毕.

参考文献:

[1] FAN Y Z,WANG Y,GAO Y B. Minimizing the least eigenvalues of unicyclic graphs with application to spectral spread[J]. Linear Algebra Appl,2008 (429):577-588

[2] CARDOSO D M,CVETKOVIĆ D,ROWLINSON P,et al. A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless laplacian of a non-bipartite graph[J]. Linear Algebra Appl,2008 (429):2770-2780

[3] LIU H Q,LU M,TIAN F. On the spectral radius of graphs with cut edges [J]. Linear Algebra Appl,2004 (389):139-145

[4] WANG Y,FAN Y Z. The least eigenvalue of a graph with cut vertices [J]. Linear Algebra Appl,2010 (433):19-27

[5] WANG Y,FAN Y Z. The least eigenvalues of signless laplacian of graphs under perturbation [J]. Linear Algebra Appl,2012 (436):2084-2092

[6] ZHANG X D. The signless Laplacian spectral radius of graphs with given degree sequences[J]. Discrete Appl Math,2009(157):2928-2937

[7] 郭伟. 对称矩阵与正交矩阵的推广及其应用[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(5):449-452

The Least Eigenvalues of Connected Graphs with Only One Cut Vertex

GUO Huan

(School of Mathematical Science,Anhui University,Hefei 230601,China)

Abstract: The graph with maximum least eigenvalue of signless Laplacian among all the graphs in a certain class is often called maximized graph. We obtain the value of the least eigenvalue of signless Laplacian of connected graph with only one cut vertex by the way of using eigenvector equation to study eigenvalue. Furthermore,we get the maximum of least eigenvalue of signless Laplacian of all the connected graphs of the same order with only one cut vertex and depict corresponding structure of the maximizing graph with maximum of least eigenvalue of signless Laplacian.

Key words: connected graph; cut vertex; signless Laplacian, least eigenvalue

责任编辑:李翠薇