文章编号:1672 - 058X(2012)09 - 0008 - 06

# 在约束条件下考虑红利和提前退休的最优投资组合*

曹安照,田 丽,周明龙,苏 凯,程晶晶

(安徽工程大学 管理工程学院,安徽 芜湖 241000)

**摘 要**:分别研究了在退休期限和借贷约束条件下提前退休的最优投资组合问题,其中考虑风险资产派发红利的情形;退休期限和借贷约束条件会使代理人相应地改变投资策略;运用了随机控制等方法,得到了代理人在约束条件下最优消费投资组合策略显示解.

**关键词**: 最优投资组合;退休期限;借贷约束;红利;随机控制

**中图分类号**:F224.9 **文献标志码**:A

Bodie et al. [1] 在退休计划背景下研究了在带有习惯形成、随机投资机会集、随机工资率以及劳动供给弹性的生命周期中消费和投资决策,个体通过选择消费投资策略,来完成退休计划. He and Pages[2] 运用对偶方法研究了当个体有有限投资机会集从未来劳动收入借贷以及不能完全确定收入波动风险的条件下个人的最优消费和投资组合策略. Lachance [3] 和 Choi and Shim[4] 研究了将闲暇和消费分离的效用函数的模型,但使得退休的期限和借贷约束抽象化. Farhi and Panageas[5] 研究了为提前退休而做出的储蓄和投资问题,运用 Cobb-Douglas 效用函数,当财富达到临界值时代理人就可以选择提前退休,并考虑约束条件下的最优投资组合. Dybvig and Liu[6] 考虑了退休弹性以及限制从未来劳动收入借贷下投资者的最优消费和投资策略.

Karatzas and Wang[7] 首次使用鞅方法,对自由停止问题作了研究. Karatzas and Shreve[8] 在研究最优投资策略时考虑到了股票红利支付. 费为银[9] 研究了金融市场上证券投资的随机模型带有红利支付的情形,并探讨了投资者的最优消费与投资的一般特征. 赵培峰等[10] 对现有的在风险度量约束下的投资组合模型进行了推广,建立带有红利情形的随机股票市场模型,给出了投资组合关于这些风险度量约束下的最优策略. 陈超等研究了经济代理人面临红利支付和劳动负效用情形下投资与退休选择问题,利用动态规划的方法去解自由边值问题,得到了代理人临界财富水平和最优消费投资组合策略显式解. 苏凯等研究了在经济代理人通过不可逆退休时间选择调整劳动时间框架下最优消费和投资问题,其中考虑风险资产派发红利的情形,但未考虑退休期限和借贷约束条件.

此处在 Farhi and Panageas[5] 的基础上,引入约束条件的同时考虑股票支付红利,对现有模型做了进一步推广,使得结果更加切合实际.

## 1 金融市场框架

首先假设代理人既可以投资于货币市场,也可以投资于股票市场中某个股票. 假定货币市场的利率 $r$ 是

**收稿日期**:2012 - 02 - 15;**修回日期**:2012 - 02 - 28.

* **基金项目**:国家自然科学基金(71171002);安徽省自然科学基金(11040606M24).

**作者简介**:曹安照(1961-),男,安徽淮南人,教授,硕导,从事人力资源管理研究.

不变的,且大于零. 由于此处所考虑的是带有红利情形的随机股票市场模型,令股票的红利率 $\delta$ 表示单位价格所带来的红利收益,且为常数,则其投资于风险市场上的每股证券满足 $\mathrm{d}P_t=P_t\{(\mu+\delta)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t\}$,其中 $\mu>r,\sigma>0$,都是已知的常数. $B_t$ 表示在完备的概率空间 $(\Omega,F,P)$ 上一维的布朗运动. 假设风险的市场价格为 $\kappa=\dfrac{\mu+\delta-r}{\sigma}$,令状态价格密度 $H(t)=\zeta(t)Z_0(t)$,其中折现过程 $\zeta(t)=\mathrm{e}^{-rt}$,指数鞅过程 $Z_0(t)=\exp\{-\kappa B_t-\dfrac{1}{2}\kappa^2 t\}$.

易知代理人的财富过程 $W_t$ 满足

$$\mathrm{d}W_t=\pi_t\{(\mu+\delta)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t\}+\{W_t-\pi_t\}r\mathrm{d}t-(c_t-y_0)\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中,过程满足初始时刻财富 $W_0\geqslant\dfrac{-y_0}{r}$,其中 $y_0$ 是收入率;$\pi_t$ 是代理人投资于风险股票的资金额; $W_t-\pi_t$ 为投资于货币市场的资金额;$c_t$ 表示的是消费者在 $t$ 时刻的消费额.

假设消费者被赋予 $l_t$ 个单位的闲暇,令闲暇只取两个值:$l_1$ 或 $\bar{l}$,即当消费者工作时其闲暇为 $l_t=l_1$,而当其退休时闲暇为 $l_t=\bar{l}$;假设代理人的工资率 $w$ 是不变的,则 $y_0=w(\bar{l}-l_1)>0$. 为使闲暇和消费均能得到满足,引入效用函数

$$U(l_t,c_t)=\frac{1}{\alpha}\frac{(l_t^{1-\alpha}c_t^{\alpha})^{1-\gamma^*}}{1-\gamma^*},\text{其中},0<\alpha<1,\gamma^*>0$$

定义相对风险厌恶系数 $\gamma=1-\alpha(1-\gamma^*)$,并令 $l_1=1$,则退休之前的效用函数可以改写成:$U_1(c)=U(1,c)=\dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

## 2　退休期限

迄今为止没有一种说法是退休时间不依赖于一个时间区间的,在无限区间情形下将不会有年龄的问题,因为解跟时间是不相关的. 在此节中,将参考文献[5]所研究的提前退休模型扩展为带有红利情形下有强迫退休时刻 $T$ 下的最优投资组合模型,这更加的切合实际.

消费者最大化期望效用,即目标函数为

$$J=\max_{c_t,W_t,\tau}E\left[\int_t^{\tau\wedge T}\mathrm{e}^{-\beta t}U(l_1,c_s)\mathrm{d}s+\int_{\tau\wedge T-t}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta(\tau\wedge T-t)}U(\bar{l},c_s)\mathrm{d}s\right] \tag{2}$$

其中,$\beta>0$ 是代理人的主观折现因子,$T$ 是退休期限,$\tau\wedge T$ 是 $\min\{\tau,T\}$ 的简写.

令 $U_2(W_{\tau\wedge T})$ 为代理人退休的值函数,$W_{\tau\wedge T}$ 是退休时刻财富的临界值. 假设退休之后代理人的最优消费和投资与参考文献[8]上第三章中的最优策略是一致的,令 $U_2(W_{\tau\wedge T})=(\bar{l}^{1-\alpha})^{1-\gamma^*}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\gamma}\dfrac{W_{\tau\wedge T}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$,其中 $\theta=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\left(r+\dfrac{\kappa^2}{2\gamma}\right)+\dfrac{\beta}{\gamma}$. 为使该值函数有意义,令 $\theta>0$ 且 $\beta-r<\dfrac{\kappa^2}{2}$,令 $K=(\bar{l}^{1-\alpha})^{1-\gamma^*}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\gamma}$,则 $U_2(W_{\tau\wedge T})$ 改写为 $U_2(W_{\tau\wedge T})=K\dfrac{W_{\tau\wedge T}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

对于凹的,严格增的,且连续可导的效用函数 $U_i:(0,\infty)\to R$,满足下面条件:$U'_i(0^+)=\lim\limits_{x\downarrow 0}U'_i(x)=\infty$ 并且 $U'_i(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}U'_i(x)=0$. 定义 $I_i(\cdot)$ 是 $U'_i(\cdot)$ 的反函数. 令 $\widetilde{U}_i(y)=\max\limits_{x>0}[U_i(x)-xy]=U_i(I_i(y))-yI_i(y)$,$0<y<\infty$. 易知 $\widetilde{U}_i(\cdot)$ 是严格降且是凸的,并满足

$$\widetilde{U'}_i(y)=-I_i(y),0<y<\infty$$

$$U_i(x) = \min_{y>0}[\widetilde{U}_i(y) + xy] = \widetilde{U}_i(U'_i(x)) + xU'_i(x), 0 < x < \infty$$

令 $\widetilde{V}(\lambda;T) = \sup_{\tau\leqslant T} E[\int_0^{\tau}[\mathrm{e}^{-\beta t}\widetilde{U}_1(\lambda \mathrm{e}^{\beta t}H(t)) + \lambda H(t)y_0]\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\beta\tau}\widetilde{U}_2(\lambda \mathrm{e}^{\beta\tau}H(\tau))]$.

**定理 1** 定义 $\widehat{V}^E(\lambda, T-t) = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\lambda^{(\gamma-1)/\gamma}\dfrac{1}{\theta}[(K^{1/\gamma}\theta-1)\mathrm{e}^{-\theta(T-t)}+1] + \lambda y_0\dfrac{1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{r}$,令 $\widetilde{V}(\lambda, T-t)$ 是由式(3)给出:

$$\begin{cases} C_{2(T-t)}\lambda^{\xi_{2(T-t)}} + \widehat{V}^E(\lambda, T-t), \lambda > \bar{\lambda}_{T-t} \\ \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}K^{1/\gamma}\lambda^{(\gamma-1)/\gamma}\right), \lambda \leqslant \bar{\lambda}_{T-t} \end{cases} \tag{3}$$

其中,

$$\bar{\lambda}_{(T-t)} = \left(\frac{(\xi_{2(T-t)}-1)\theta_{(T-t)}}{\left(1+\xi_{2(T-t)}\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)(K^{1/\gamma}\theta_{(T-t)}-1)}\frac{y_0(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)})}{r}\right)^{-\gamma} \tag{4}$$

$$\theta_{(T-t)} = \frac{\theta}{[(K^{1/\gamma}\theta-1)\mathrm{e}^{-\theta(T-t)}+1]}$$

$$C_{2(T-t)} = \frac{\left[\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\dfrac{(\xi_{2(T-t)}-1)}{\left(1+\xi_{2(T-t)}\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)}-1\right]\dfrac{y_0(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)})}{r}}{\underline{\lambda}_{(T-t)}^{\xi_{2(T-t)}-1}} \tag{5}$$

$$\xi_{2(T-t)} = \frac{1-2\dfrac{\beta-r}{\kappa^2}-\sqrt{\left(1-2\dfrac{\beta-r}{\kappa^2}\right)^2+8\dfrac{\beta}{(1-\mathrm{e}^{-\beta(T-t)})\kappa^2}}}{2}$$

易知 $\widetilde{V}(\lambda, T-t)$ 处处连续可微,且其所对应的映射是 $(0,\infty)\to(-\infty, \dfrac{y_0}{r}(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}))$,令 $\lambda^*$ 是方程(6)唯一的解.

$$\xi_{2(T-t)}C_{2(T-t)}(\lambda^*)^{\xi_{2(T-t)}-1} - \frac{1}{\theta_{(T-t)}}(\lambda^*)^{-1/\gamma} + \frac{y_0(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)})}{r} + W_t = 0 \tag{6}$$

(A) 如果 $W_t < \overline{W}_{(T-t)} = K^{1/\gamma}\underline{\lambda}_{(T-t)}^{-1/\gamma}$,则消费服从下面的过程:

$$c_s = \left(\lambda^*\mathrm{e}^{\beta(s-t)}\frac{H(s)}{H(t)}\right)^{-1/\gamma}1_{\{t\leqslant s\leqslant\tau^*\}}, c_s = \bar{l}^{(1-\alpha)(1-\gamma^*)1/\gamma}\left(\lambda^*\mathrm{e}^{\beta(s-t)}\frac{H(s)}{H(t)}\right)^{-1/\gamma}1_{\{s\geqslant\tau^*\}}$$

最优退休时刻为 $\tau^* = \inf\{s: W_s = \overline{W}_{(T-t)}\} = \inf\{s: \lambda^*\mathrm{e}^{\beta(s-t)}\dfrac{H(s)}{H(t)} = \underline{\lambda}_{(T-t)}\}$.

进而得出最优的消费和投资过程:

$$c_t = c(W_t) = (\lambda^*(W_t))^{-1/\gamma}$$

$$\pi_t = \pi(W_t) = \frac{\kappa}{\sigma}(\xi_{2(T-t)}(\xi_{2(T-t)}-1)C_{2(T-t)}\lambda^*(W_t)^{\xi_{2(T-t)}-1} + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\theta_{(T-t)}}\lambda^*(W_t)^{-1/\gamma})$$

其中记号 $\lambda^*(W_t)$ 是用来表示 $\lambda^*$ 是依赖于 $W_t$ 的.

(B) 如果 $W_t \geqslant \overline{W}_{(T-t)}$,则最优的解就是代理人立即进入退休,即当 $\tau^* = t$,且其最优的消费和投资组合策略和参考文献[8]上第三章一样的.

$$c_t = \bar{l}^{(1-\alpha)(1-\gamma^*)/\gamma}(\lambda^*(W_t))^{-1/\gamma}, \pi_t = \frac{\kappa}{\sigma}\frac{1}{\gamma}W_t$$

**证明** 首先定义

$$\widehat{V}^E(\lambda;T) \triangleq E[\int_0^T[\mathrm{e}^{-\beta t}\widetilde{U}_1(\lambda \mathrm{e}^{\beta t}H(t)) + \lambda H(t)y_0]\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\beta\tau}\widetilde{U}_2(\lambda \mathrm{e}^{\beta t}H(T))] \tag{7}$$

计算$\widetilde{V}^{E}(\lambda,T)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\theta T}}{\theta}+\lambda y_0\frac{1-\mathrm{e}^{-rT}}{r}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}K^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{e}^{-\theta T}$.

下一步就是研究$\widetilde{V}(\lambda;T)$与$\widetilde{V}^{E}(\lambda;T)$之差. 提前执行溢价

$$P(\lambda;T)=\widetilde{V}(\lambda;T)-\widetilde{V}^{E}(\lambda;T) \tag{8}$$

在连续时间区间内,提前执行溢价 $P(\lambda;T)$,可以解下面偏微分方程:

$$-\beta P+P_Z Z(\beta-r)+\frac{1}{2}P_{ZZ}Z^2\kappa^2-P_T=0 \tag{9}$$

运用类似于 Barone-Adesi and Whaley (1987) 中的思想,假定解的形式为 $P=Y(T)f(Z,Y(T))$,取 $Y(T)=1-\mathrm{e}^{-\beta T}$,并忽略 $P_Y$. 将上述问题简化为下面等式的求解:

$$f_Z Z(\beta-r)+\frac{1}{2}Z^2\kappa^2 f_{ZZ}-\frac{\beta}{Y(T)}f=0 \tag{10}$$

很显然式(9)是线性常微分方程,则在无限区间上,解为 $f(Z)=C_{2T}Z^{\xi 2T}$,其中,$\xi_{2T}=\dfrac{1-2\dfrac{\beta-r}{\kappa^2}-\sqrt{\left(1-2\dfrac{\beta-r}{\kappa^2}\right)^2+8\dfrac{\beta}{Y(T)\kappa^2}}}{2}$.

为了求解完备解,需要$\widetilde{V}(\lambda;T)$到$\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda^{(\gamma-1)/\gamma}K^{1/\gamma}$是连续且光滑的路径,然后类似于无限区间的情形,可以得到式(4)和(5),剩余的证明类似于没有期限的情形,详见参考文献[5].

很显然,在有退休期限条件下的最优消费、投资组合公式与参考文献[12]中对应的公式是类似的,唯一的不同就是依赖于$(T-t)$项的常数需要作出相应的修改. 因此,所有的分析类似于文献[5],故此处将不再做相同的分析. 在这里仅讨论关于年龄的函数投资选择模型的含义.

由定理 1 可知,最优的投资于风险市场的资产量 $\pi_t$ 与金融财富 $W_t$ 之比 $\varphi$ 为

$$\varphi=\frac{\kappa}{\sigma}\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{y_0}{W_t}\frac{1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{r}\right)+\frac{\kappa}{\sigma}\frac{y_0}{W_t}\frac{1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{r}\left(\frac{J_W(W_t,T-t)}{J_W(\overline{W}_{T-t},T-t)}\right)^{\xi_{2(T-t)}-1}\times$$
$$\xi_{2(T-t)}\left((\xi_{2(T-t)}-1)+\frac{1}{\gamma}\right)\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{(\xi_{2(T-t)}-1)}{\left(1+\xi_{2(T-t)}\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}-1\right] \tag{11}$$

其中,$\overline{W}_{T-t}$是当代理人离强迫退休还有 $T-t$ 年的财富临界值. 很显然,无论随着财富的增加还是离强迫退休的时间的减少,第一项都会减少. 而第二项是复制了提前退休期权的投资组合,并且是严格正的. 因此,当 $T-t$逐渐变小,式(11)的第二项也将被期望减少;然而当 $W_t$ 增大的时候,它又趋向于增大. 也即单纯的区间影响和财富影响之间是有着密切相关联系的. 随着代理人年龄的增长(但还没有到退休的年龄),单纯的区间影响将倾向于减少在股票市场的配额,然而,期望财富也在增加,提前退休的期权也就变得越来越相关,且消除了第一项的影响.

## 3　借贷约束

到目前为止,都是在假设代理人能够从未来的劳动收入借贷这个条件下进行的. 此节中,将强加约束条件,即代理人不能从未来的劳动收入借贷. 从形式上来说,就是要求对于任意的 $t>0$,都有 $W_t\geqslant 0$. 为了方便简易处理,假设代理人能够选择在任意时刻进入退休,使得问题变得固定,且最终的最优消费和投资决策将仅与 $W_t$ 的函数有关.

借贷约束条件在退休之后将不起作用,这是因为代理人在退休之后将不会有劳动收入,且有不变的相对风险厌恶系数,而这也就是意味着一旦代理人退休,他的消费、投资组合以及值函数将和没有借贷约束情

形下是一样的. 特别地,当代理人在 $\tau$ 时刻,财富为 $W_\tau$ 时选择退休,他的期望效用是 $U_2(W_\tau)=(\bar{l}^{1-\alpha})^{1-\gamma^*}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\gamma}\frac{W_\tau^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

代理人所面临的问题就变成

$$J=\max_{c_t,W_\tau,\tau}E\left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\beta t}U(l_1,c_t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\beta\tau}U_2(W_\tau)\right] \tag{12}$$

其所受借贷约束为 $W_t\geqslant 0,\forall t>0$,以及预算约束为

$$\mathrm{d}W_t=\pi_t\{(\mu+\delta)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t\}+\{W_t-\pi_t\}r\mathrm{d}t-(c_t-y_0 1_{\{t<\tau\}})\mathrm{d}t \tag{13}$$

**定理 2** 假设存在相关的常数 $C_1,C_2,Z_L,Z_H,\xi_1$ 和 $\xi_2$ 以及一个正的递减过程 $X_s^*$,且有 $X_t^*=1$ 使得最优策略组 $[\hat{c}_s,\widehat{W}_{\hat{\tau}},\hat{\tau}]$ 如下:

(a) 如果 $W_t<\overline{W}=K^{1/\gamma}Z_L^{-1/\gamma}$, $\hat{\tau}=\inf\{s:W_s=\overline{\overline{W}}\}=\inf\left\{s:\lambda^*\mathrm{e}^{\beta(s-t)}X_s^*\frac{H(s)}{H(t)}=Z_L\right\}$, $\hat{c}_s=\left(\lambda^*\mathrm{e}^{\beta(s-t)}X_s^*\frac{H(s)}{H(t)}\right)^{-1/\gamma}1_{\{s<\hat{\tau}\}}$, $\widehat{W}_{\hat{\tau}}=\overline{W}$,其中 $\lambda^*$ 是方程 $\xi_1C_1(\lambda^*)^{\xi_1-1}+\xi_2C_2(\lambda^*)^{\xi_2-1}-\frac{1}{\theta}(\lambda^*)^{-1/\gamma}+\frac{y_0}{r}+W_t=0$ 的解. 用记号 $\lambda^*(W_t)$ 来精确的表示 $\lambda^*$ 是依赖于 $W_t$ 的,则最优的消费和投资策略表达式为

$$c_t=c(W_t)=(\lambda^*(W_t))^{-1/\gamma} \tag{14}$$

$$\pi_t=\pi(W_t)=-\frac{\kappa}{\sigma}\frac{\lambda^*(W_t)}{\lambda_{W_t}^*(W_t)} \tag{15}$$

其中 $\lambda_{W_t}^*(W_t)$ 表示为 $\lambda^*(W_t)$ 的一阶导数.

(b) $W_t\geqslant\overline{\overline{W}}=K^{1/\gamma}Z_L^{-1/\gamma}$,则代理人可以选择立即退休($\hat{\tau}=t$),最优消费和投资组合策略可由参考文献[8]第三章中的最优策略给出,即退休之后关于 $W_t$ 函数的最优消费和投资过程为

$$c_t=\bar{l}^{(1-\alpha)(1-\gamma^*)/\gamma}(\lambda^*(W_t))^{-1/\gamma} \tag{16}$$

$$\pi_t=\frac{\kappa}{\sigma}\frac{1}{\gamma}W_t \tag{17}$$

**证明** 详见参考文献 5 的定理 3.

图 1 比较了有无借贷约束这两种情形下的投资组合,选取的财富水平接近于退休但低于退休临界水平. 图形刻画了在接近于退休水平时,这两种情形仅有的微小差异. 可以观察到随着财富的增加,股票的持有量也在不断的增加;在退休之前,不管是否强加借贷约束,最优的股票持有都倾向于增加.

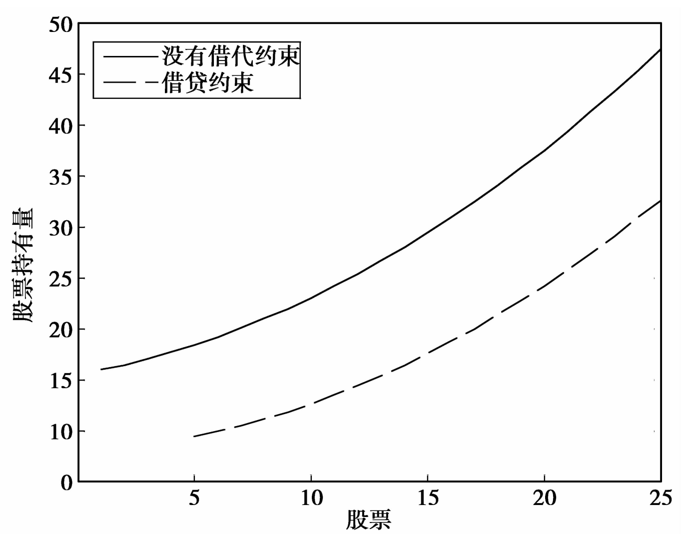


图 1 有无借贷约束条件下的股票持有量

由此,借贷约束与财富水平是不相关的,而最优退休与财富高水平是相关的. 当退休期权接近于执行时,借贷约束是可以被安全忽略的. 然而,需要注意的是借贷约束会影响一定的数量关系,譬如,初始时刻财富水平为零的代理人的期望退休时间,因为他们通常意味着持有较少的股票,且其到达财富临界值也需要延长一定的时间.

## 4 小　结

在现有的为提前退休而进行的最优消费和投资组合模型基础上,加上约束条件并考虑风险资产派发红利的情形,对模型进行了推广,运用随机控制方法,给出了投资者在这两种情形下的最优消费 - 投资与退休选择策略,所得结论具有较为现实的经济意义和实际指导意义.

**参考文献:**

[1] BODIE Z, DETEMPLE J B, OTRUBA S, et al. Optimal consumption portfolio choices and retirement planning[J]. Journal of Economic Dynamics and Control,2004,28(3):1115-1148

[2] HE H, PAGES H F. Labor income, borrowing constraints, and equilibrium asset prices[J]. Journal of Economic Theory,1993(3):663-696

[3] LACHANCE E. Optimal investment behavior as retirement looms[Z]. Working Paper, Wharton,2003

[4] CHOI K J, Shim G. Disutility, optimal retirement, and portfolio selection[J]. Math Finance,2006,16:443-467

[5] FARHI E, PANAGEAS S. Saving and investing for early retirement: A theoretical analysis[J]. Journal of Financial Economics,2007,83:87-121

[6] DYBVIG P H, LIU H. Lifetime consumption and investment: retirement and constrained Bor-rowing [J]. Journal of Economic Theroy,2010,145:885-907

[7] KARATZAS I, WANG H. Utility maximization with discretionary stopping[J]. SIAM Journal on Control and Optimization,2000,39(1):306-329

[8] KARATZAS I, SHREVE S E. Methods of Mathematical Finance[M]. New York: Springer,1998

[9] 费为银. 考虑红利支付的最优消费投资模型研究[J]. 安徽机电学院学报,1997,12(4):62-67

[10] 赵培峰,费为银,王芳. 不同风险度量约束下带有红利的投资组合模型研究[J]. 经济数学,2009,26 (1):41-48

[11] 刘锐,李树生. 无界域上二阶非线性脉冲边值问题解的存在性[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(5):441-443

# Optimal Portfolio Model with Earlier Retirement and Dividend Payments under Constraint Conditions

**CAO An-zhao, TIAN Li, ZHOU Ming-long, SU Kai, CHENG Jing-jing**

(Management College of Engineering, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China)

**Abstract**: This paper studies optimal portfolio model for earlier retirement problem under retirement age and borrow/lend constraint conditions respectively through considering the case of the dividend-payment of risk assets. Retirement age and borrow/lend constraint conditions will change the agent's corresponding investment strategy. In this article, we use the method such as stochastic control and so on and obtain the explicit solution to optimal consumption-investment portfolio of the agent under constraint condition.

**Key words**: optimal investment portfolio; retirement age; borrow/lend constraint; dividend; stochastic control

责任编辑:李翠薇