文章编号:1672－058X(2012)08－0022－04

一类 o-对称矩阵的 3 种分解*

郭 伟
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:给出 o-对称矩阵概念及结构,研究其中一类 o-对称矩阵的 LDU 分解和 Cholesky 分解及三对角分解,给出了分解公式,得到一些新结果,据此可大大减少这类矩阵的 LDU 分解和 Cholesky 分解及三对角分解的计算量和存储量.

关键词:o-对称矩阵;LDU 分解;Cholesky 分解;三对角分解
中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

1 预备知识

在信号分析、图像处理及工程应用中,常常出现各种对称现象(对称矩阵),其中一类是具有轴对称结构的矩阵,如信号分析中的短时 Fourier 变换具有轴对称现象,还有 Gabor 变换、Margenau-Hill 分布、伪 Margenau-Hill 分布、Page 分布等都具有零频率轴对称特性[1]. 文献[2]研究了行(列)对称矩阵的 LDU 分解和 Cholesky 分解,文献[3]研究了矩阵的 o-相似和 o-合同. 在此基础上,作者提出 o-对称矩阵概念,研究了其中一类 o-对称矩阵的奇异值分解、满秩分解、正交对角分解,schur 分解和正规阵分解[4-7]. 在此前研究基础上继续研究这类矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解及三对角分解,使这类矩阵的 3 种分解只用其一子阵的 3 种分解代替,因而可大大节省这类矩阵在求 LDU 分解和 Cholesky 分解及三对角分解时的计算量和存储量.

文中 $R^{m\times n}$表示 $m\times n$ 实矩阵的集合, A^{T},A^{-}分别表示 A 的转置、次转置阵,J 表示次对角线元素为 1,其余元素为 0 的方阵,E 表示单位阵.

定义 1[4] 设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$,如果 $B=(A^{\mathrm{T}})^{-}$,则称 B 是 A 的全转置阵,记为 $B=A^{\mathrm{o}}$;如果 $A^{\mathrm{o}}=A$,则称 A 为 o-对称矩阵.

引理 1[4] (1) $J^2=E$,$J^{\mathrm{T}}=J$,$J^{-}=J$.

(2) 若 $A\in R^{m\times n}$,则$(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}=A$,$A^{\mathrm{o}}=(A^{-})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-}=J_mAJ_n$.

(3) 若 $\alpha\in R^{m\times 1}$,$\beta\in R^{1\times n}$,则 $\alpha^{\mathrm{o}}=J_m\alpha$,$\beta^{\mathrm{o}}=\beta J_n$.

易知:$A=\begin{bmatrix} B & BJ_n \\ J_mB & J_mBJ_n \end{bmatrix}\in R^{2m\times 2n}$,$A=\begin{bmatrix} B & O & BJ_n \\ J_mB & O & J_mBJ_n \end{bmatrix}\in R^{2m\times(2n+1)}$,$A=\begin{bmatrix} B & BJ_n \\ O & O \\ J_mB & J_mBJ_n \end{bmatrix}\in R^{(2m+1)\times 2n}$,

收稿日期:2012－02－21;**修回日期**:2012－03－04.
* **基金项目**:重庆市教委科技项目(KJ090729).
作者简介:郭伟(1963-),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论及应用研究.

$A=\begin{bmatrix} B & O & BJ_n \\ O & 0 & O \\ J_mB & O & J_mBJ_n \end{bmatrix}\in R^{(2m+1)\times(2n+1)}$ 就是一类具有轴对称结构的 o-对称矩阵.

2 LDU 分解

定理 1 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\in R^{2n\times 2n}$, B 的顺序主子式 $\Delta_k\neq 0, k=1,2,\cdots,n-1$; $L^{-1}BU^{-1}=D=\mathrm{diag}(d_1, d_2,\cdots,d_n)$, $d_1=\Delta_1, d_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k=1,2,\cdots,n$;其中 $L(U)$ 是单位下(上)三角矩阵,则存在 $L_1=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}$, $U_1=\begin{bmatrix} U & UJ \\ O & U \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

证明 易知 $L_1(L_1^{-1}), U_1(U_1^{-1})$ 仍是下(上)三角矩阵,且 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & UJ \\ O & U \end{bmatrix}^{-1}=$ $\begin{bmatrix} L^{-1} & O \\ -L^{-1}J & L^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^{-1} & -JU^{-1} \\ O & U^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L^{-1}BU^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

定理 2 $A=\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\in R^{2n\times(2n+1)}$, B 的顺序主子式 $\Delta_k\neq 0, k=1,2,\cdots,n-1$; $L^{-1}BU^{-1}=D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $d_1=\Delta_1, d_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k=1,2,\cdots,n$;其中 $L(U)$ 是单位下(上)三角矩阵,则存在 $L_1=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}$, $U_1=\begin{bmatrix} U & O & UJ \\ O & 1 & O \\ O & O & U \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

证明 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & O & UJ \\ O & 1 & O \\ O & O & U \end{bmatrix}^{-1}=$

$$\begin{bmatrix} L^{-1} & O \\ -L^{-1}J & L^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^{-1} & O & -JU^{-1} \\ O & 1 & O \\ O & O & U^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L^{-1}BU^{-1} & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

同理可得以下 2 个定理:

定理 3 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & \\ O & \\ JB & BJ \\ O & \\ JBJ & \end{bmatrix}\in R^{(2n+1)\times 2n}$,矩阵 B, L, U, D 的条件与定理 1 同,则存在可逆单位下三角阵 $L_1=\begin{bmatrix} L & O & O \\ O & 1 & O \\ JL & O & L \end{bmatrix}$,可逆单位上三角阵 $U_1=\begin{bmatrix} U & UJ \\ O & U \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

定理 4 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ O & 0 & O \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\in R^{(2n+1)\times(2n+1)}$,矩阵 B, L, U, D 的条件与定理 1 同,则存在可逆单位下

三角阵 $L_1=\begin{bmatrix} L & O & O \\ O & 1 & O \\ JL & O & L \end{bmatrix}$,可逆单位上三角阵 $U_1=\begin{bmatrix} U & O & UJ \\ O & 1 & O \\ O & O & U \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}AU_1^{-1}=\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

3 Cholesky 分解

定理 5 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\in R^{2n\times 2n}$,对称正定矩阵 $B=LL^{\mathrm{T}}$(L 为非异下三角阵),则存在非异下三角阵 $L_1=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}A(L_1^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix} E_n & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

证明 $L_1^{-1}A(L_1^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} L & O \\ JL & L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=$

$$\begin{bmatrix} L^{-1} & O \\ -L^{-1}J & L^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (L^{\mathrm{T}})^{-1} & -J(L^{\mathrm{T}})^{-1} \\ O & (L^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L^{-1}B(L^{\mathrm{T}})^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

同理可得:

定理 6 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ O & 0 & O \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\in R^{(2n+1)\times(2n+1)}$,对称正定矩阵 $B=LL^{\mathrm{T}}$(L 为非异下三角矩阵),则存在非异下三角阵 $L_1=\begin{bmatrix} L & O & O \\ O & 1 & O \\ JL & O & L \end{bmatrix}$,使 $L_1^{-1}A(L_1^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix} E_n & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

4 三对角分解

定理 7 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\in R^{2n\times 2n}$, $T^{-1}BT=C$, $C\in R^{n\times n}$ 为三对角矩阵,则存在可逆阵 $T_1=\begin{bmatrix} T & O \\ JT & -JT \end{bmatrix}$, $T_2=\begin{bmatrix} T & T \\ O & -JT \end{bmatrix}$,使 $T_1^{-1}AT_2=\begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

证明 $T_1^{-1}AT_2=\begin{bmatrix} T & O \\ JT & -JT \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & T \\ O & -JT \end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} T^{-1} & O \\ T^{-1} & -T^{-1}J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & BJ \\ JB & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & T \\ O & -JT \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T^{-1}BT & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

同理可得:

定理 8 矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\in R^{2n\times(2n+1)}$, $T^{-1}BT=C$, $C\in R^{n\times n}$ 为三对角矩阵,则存在可逆阵 $T_1=\begin{bmatrix} T & O \\ JT & -JT \end{bmatrix}$, $T_2=\begin{bmatrix} T & O & T \\ O & 1 & O \\ O & O & -JT \end{bmatrix}$,使 $T_1^{-1}AT_2=\begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

证明 $T_1^{-1}AT_2=\begin{bmatrix} T & O \\ JT & -JT \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & O & T \\ O & 1 & O \\ O & O & -JT \end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} T^{-1} & O \\ T^{-1} & -T^{-1}J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & O & BJ \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & O & T \\ O & 1 & O \\ O & O & -JT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}BT & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

同理可得:

定理 9　矩阵 $A = \begin{bmatrix} B & BJ \\ O & O \\ JB & JBJ \end{bmatrix} \in R^{(2n+1)\times 2n}$, $T^{-1}BT = C$, $C \in R^{n\times n}$ 为三对角矩阵,则存在可逆阵 $T_1 = \begin{bmatrix} T & O & O \\ O & 1 & O \\ JT & O & -JT \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} T & T \\ O & -JT \end{bmatrix}$,使 $T_1^{-1}AT_2 = \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

定理 10　矩阵 $A = \begin{bmatrix} B & O & BJ \\ O & 0 & O \\ JB & O & JBJ \end{bmatrix} \in R^{(2n+1)\times(2n+1)}$, $T^{-1}BT = C$, $C \in R^{n\times n}$ 为三对角矩阵,则存在可逆阵 $T_1 = \begin{bmatrix} T & O & O \\ O & 1 & O \\ JT & O & -JT \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} T & O & T \\ O & 1 & O \\ O & O & -JT \end{bmatrix}$,使 $T_1^{-1}AT_2 = \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

参考文献:

[1] 邹红星,王殿军,戴琼海,等. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 电子学报:2001,29(3):289-292

[2] 袁晖坪. 行(列)对称矩阵的 LDU 分解和 Cholesky 分解[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2007,28(1):88-91

[3] 许永平,胡卫群. 矩阵的 o-相似与 o-合同[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2006,30(4):59-63

[4] 郭伟. o-对称矩阵的奇异值分解及其算法[J]. 数学杂志:2009,29(3):344-350

[5] 郭伟. 全对称矩阵的满秩分解及 Moore-Penrose 逆[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(4):454-457

[6] 郭伟,王文惠,李庆玉. o-对称矩阵的正交对角分解及 Moore-Penrose 逆[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2009,34(5):25-28

[7] 郭伟,张义萍. o-对称矩阵的 Schur 分解和正规阵分解[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(5):447-451

[8] 程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论[M]. 2 版. 西安:西北工业大学出版社,2000

Three Kinds of Decompositions for a Class of o-symmetry Matrix

GUO Wei

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: This paper gives concept and structure of o-symmetry matrix, studies LDU decomposition, Cholesky decomposition and triple diagonal decomposition of a class of o-symmetry matrix, proposes its decomposition formula, and obtains some new conclusions, which can largely reduce the calculation and storage quantity of the three kinds of decompositions of this class of matrix.

Key words: o-symmetry matrix; LDU decomposition; Cholesky decomposition; triple diagonal decomposition

责任编辑:田　静
校　　对:李翠薇