文章编号:1672 - 058X(2012)08 - 0008 - 03

# 矩阵展形和矩阵秩的注记*

姚美荣, 伍俊良**, 薛兰兰
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

**摘　要:**首先在原有矩阵的基础上构造新的矩阵,然后对原矩阵特征值模的平方和的上界值进行估计得到新的上界值,进而给出矩阵展形及矩阵秩的一些新的估计值;最后,给出的数值算例表明结果是有效的.

**关键词:** 矩阵;秩;展形

**中图分类号:**O151.21　　　**文献标志码:**A

1956 年,Mirsky 首次定义了两个特征值的“最大距离”,即 $S(A)=\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为矩阵 $A$ 的特征值。后来人们给了它一个统一的名称,称 $S(A)$为矩阵展形(Spread). 在文献[1]中,Mirsky 给出了第一个关于展形的上界估计式:

$$S(A)\leqslant\sqrt{2}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2-\frac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

现将在如上 Mirsky 展形的基础上给出矩阵展形的一些新的估计.

## 1　主要结果及证明

以$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$作为一个指标集,$\alpha$ 和 $\beta$ 是$[n]$的子集,$\alpha^1=[n]\backslash\alpha$ 表示$[n]$关于 $\alpha$ 的补集. $A[\alpha,\beta]$是表示矩阵 $A$ 的子矩阵,其行和列分别是由矩阵 $A$ 中的标号为 $\alpha$ 的诸行和标号为 $\beta$ 的诸列元素确定. 令 $A_1=A[\alpha,\alpha]$,$A_2=A[\alpha,\alpha^1]$,$A_3=A[\alpha^1,\alpha]$,$A_4=A[\alpha^1,\alpha^1]$. 对满足 $A_2\neq0$,$A_3\neq0$ 的 $n$ 阶复方阵 $A=(a_{ij})$,定义如下矩阵 $A(\alpha,\varepsilon)=(a'_{ij})$,其中

$$a'_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & i,j\in\alpha\\ \dfrac{1}{\varepsilon}a_{ij} & i\in\alpha,j\in\alpha^1\\ \varepsilon a_{ij} & i\in\alpha^1,j\in 2\end{cases}$$

$\varepsilon\in C$,$\varepsilon\neq0$,即

$$A(\alpha,\varepsilon)=\begin{bmatrix}A_1 & \dfrac{1}{\varepsilon}A_2\\ \varepsilon A_3 & A_4\end{bmatrix}\tag{1}$$

**引理**　对任意复方阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的特征值设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

**收稿日期:**2011 - 11 - 23;**修回日期:**2011 - 12 - 21.

* **基金项目:**国家自然科学基金(70872123).

**作者简介:**姚美荣(1988- ),女,山东德州人,硕士研究生,从事矩阵理论研究.

** **通讯作者:**伍俊良( 1958- ),男,四川人,教授,从事数学理论研究.

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

**证明**　由式(1)可知,$A(\alpha,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\varepsilon}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$,从而 $A$ 相似于 $A(\alpha,\varepsilon)$,进而有 $\sigma(A)=\sigma[A(\alpha,\varepsilon)]$. 在式(2)中,Nowosad 和 Tovar 得出了不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

进而得到

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

**定理**　对任意 $n$ 阶复方阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$,下列不等式成立

$$S(A)\leqslant\sqrt{2}[\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)-\frac{1}{n}(trA)^2]^{\frac{1}{2}}$$

**证明**　方阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 不失一般性,假定 $S(A)=\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|=|\lambda_{n-1}-\lambda_n|$. 令 $\omega_i=\dfrac{2\lambda_i-(\lambda_{n-1}+\lambda_n)}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}(i=1,2,\cdots,n)$,$W=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}|\omega_i-\omega_j|^2\geqslant 0$. 易知 $\omega_{n-1}=-1,\omega_n=1$,且得到表达式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2=\frac{1}{4}S^2(A)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\omega_i-\omega_j|^2=\frac{1}{4}S^2(A)\{W+\sum_{i=1}^{n-2}|\omega_i-\omega_{n-1}|^2+\sum_{i=1}^{n-1}|\omega_i-\omega_n|^2\}=$$
$$\frac{1}{4}S^2(A)\{W+4+\sum_{i=1}^{n-2}(|\omega_i+1|^2+|\omega_i-1|^2)\}=\frac{1}{4}S^2(A)\{W+2\sum_{i=1}^{n-2}|\omega_i|^2+2n\}\geqslant\frac{1}{2}nS^2(A)$$

即
$$S^2(A)\leqslant\frac{2}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2 \tag{3}$$

由 Lagrange 恒等式有 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-|\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i|^2$.

结合引理及式(3)知结论显然成立.

**推论**　设 $A$ 为任意 $n$ 阶复方阵,则有 $\mathrm{rank}(A)\geqslant\dfrac{|tr(A)|^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

**证明**　根据 Schur 定理知,存在酉矩阵 $U$,使得

$$U^*AU=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 $A$ 的非零特征值,显然有 $r\leqslant\mathrm{rank}(A)$,于是

$$|tr(A)|^2=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2=(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i)^2\leqslant r\sum_{i=1}^{r}|\lambda_i|^2\leqslant\mathrm{rank}(A)\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \tag{4}$$

由式(4)和引理有 $|tr(A)|^2\leqslant\mathrm{rank}(A)\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}$,故而有

$$\mathrm{rank}(A)\geqslant\frac{|tr(A)|^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a'_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

## 2 数值算例

**例1** 设 $A=\begin{bmatrix}3&0&4\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$. 取 $\alpha=[1],\varepsilon=2$. 则:$A[\alpha,\varepsilon]=\begin{bmatrix}3&0&2\\0&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}$.

由定理可得 $S(A)\leqslant 4.6188$,而由 Mirsky 的结论得 $S(A)\leqslant 6.272$. 因此可以看出定理相较于 Mirsky 的矩阵展形的上界更优.

**例2** 设 $A=\begin{bmatrix}2&5&0\\\frac{1}{5}&4&2\\0&2&4\end{bmatrix}$. 取 $\alpha=[1],\varepsilon=5$. 则:$A[\alpha,\varepsilon]=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&4&2\\0&2&4\end{bmatrix}$.

由推论知,$\mathrm{rank}(A)\geqslant 2.174$. 在文献[3]中,Ky. Fan 和 Hoffman 提出的一个经典的关于秩的不等式

$$\mathrm{rank}(A)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_{ii}|}{R_i(A)}$$

其中 $R_i(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. 可算出此时,$\mathrm{rank}(A)\geqslant 1.273$. 显然得到的结果比 Ky. Fan 和 Hoffman 的结果更为精确.

**参考文献:**


[1] MIRSKY L. The Spread of a Matrix[J]. Muthemutika,1956,3: 127-136

[2] NOWOSAD P,TOVAR R. Spectral inequalities and G-function[J]. Linear Algebra and Application,1980,31: 179-197

[3] BELLMAN R. Introduction to Matrix Analysis[M]. New York:McGraw-Hill,1970

[4] HUANG T ZH,LI W,SUN W W. Estimates for Bounds of some Numerical Characters of Matrices[J]. Linear Algebra and Application,2000,319:137-140

[5] 屠伯埙. 关于矩阵的展形[J]. 复旦学报:自然科学版,1993,23(4):435-441

[6] 胡兴凯,邹黎敏. 矩阵秩和特征值的估计[J]. 西南大学学报,2009,12:99-102

[7] 匡德胜. 非奇异 H-矩阵的充分条件[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28:331-333


# A Note on Estimation for the Spread and the Rank of Matrices


**YAO Mei-rong, WU Jun-liang, XUE Lan-lan**

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)



**Abstract**: First of all, we build a new matrix based on the original matrix, some new estimations for the spread and the rank of matrices is obtained in this paper through finding upper bound by estimating upper bound value for the sum of squares of the module of eigenvalues of the original matrices, and at last, some numerical examples verify the effectiveness of our results.



**Key words**: matrix; rank; spread



责任编辑:田 静