第 29 卷第 7 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2012 年 7 月
Vol. 29 NO. 7 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jul. 2012

**文章编号:**1672 -058X(2012)07 -0051 -06

# “生产与存储问题”最优决策与两个变量的取值范围 *

芮世春[1],王永富[2]

(1. 安徽财经大学 管理科学与工程学院,安徽 蚌埠 233030;2. 中国科学技术大学 工程科学学院,合肥 233027)

**摘　要:**通过实例验证指出目前“生产与存储问题”模型在运用动态规划顺序递推法求最优解的过程中,涉及的第 $k$ 阶段的生产量 $x_k$ 和第 $k$ 阶段末的库存量 $v_k$ 的取值范围出现了错误;并在对“生产与存储问题”的最优化模型进行研究后,根据总的生产成本费用和库存费用之和最小的原则,推导出正确的 $x_k$ 和 $v_k$ 的取值范围。

**关键词:**生产与存储问题;生产量取值范围;库存量取值范围;动态规划;顺序递推法

**中图分类号:**O221.3;F224.3;F224.9　　**文献标志码:**A

运用动态规划顺序递推法求解“生产与存储问题”的最优化模型,目前的研究状况大致分为两类,第一类,从理论上作出了解答,但是都出现了错误[1-4];第二类,是针对具体问题,通过讨论的方法获得具体数据范围。无论哪一类情况都不理想,因此,对这两个变量有提出来进行讨论研究的必要。

## 1　研究现状

### 1.1　“生产与存储问题”最优化模型的建立

某公司对某种产品要制定一项 $n$ 个阶段的生产(或购买)计划。已知它的初始库存量为零,每个阶段生产(或购买)该产品的数量有上限;每阶段社会对该产品的需求量是已知的,公司保证供应;在 $n$ 阶段末的终结库存量为零。问该公司如何制定每个阶段的生产(或购买)计划,从而使总成本最小。

设 $d_k$ 为第 $k$ 阶段对产品的需求量,$x_k$ 为第 $k$ 阶段该产品的生产量(或采购量),$v_k$ 为第 $k$ 阶段结束时的产品库存量,$c_k(x_k)$ 表示第 $k$ 阶段生产产品 $x_k$ 的成本费用,包括生产准备成本 $K$ 和产品成本 $ax_k$(其中 $a$ 是单位产品成本)两项费用。则有:

$$v_k = v_{k-1} + x_k - d_k,$$

$$c_k(x_k) = \begin{cases} 0, & x_k = 0 \\ K + ax_k & x_k = 1,2,\cdots,m \\ \infty & x_k > m \end{cases}$$

$m$ 表示每个阶段最多能生产该产品的上限数。用 $h_k(v_k)$ 表示在第 $k$ 阶段结束时有库存量 $v_k$ 所需的存储费用。故第 $k$ 阶段的成本费用为 $c_k(x_k) + h_k(v_k)$。

**收稿日期:**2012 -02 -27;**修回日期:**2012 -04 -20.

* **基金项目:**国家自然科学基金项目 (71071001);安徽省教育厅重点研究项目(SK 2012A001).

**作者简介:**芮世春(1971-),女,讲师,博士,从事决策分析与企业竞争战略研究.

因而,上述问题的数学模型:

$$\min g = \sum_{k=1}^{n}[c_k(x_k) + h_k(v_k)]$$

$$\begin{cases} v_0 = 0, v_n = 0 \\ v_k = \sum_{j=1}^{k}(x_j - d_j) \geqslant 0 \quad k = 2,\cdots,n-1 \\ 0 \leqslant x_k \leqslant m \quad k = 1,2,\cdots,n \\ x_k \text{ 为整数} \quad k = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

### 1.2 文献中运用动态规划对模型求解[1-4]

令 $v_{k-1}$ 为状态变量,表示第 $k$ 阶段开始时的库存量;$x_k$ 为决策变量,表示第 $k$ 阶段的生产量。状态转移方程为 $v_k = v_{k-1} + x_k - d_k \quad k=1,2,\cdots,n$;最优值函数 $f_k(v_k)$ 表示从第一阶段初始库存量为 0 到第 $k$ 阶段末库存为 $v_k$ 时的最小总费用,因而可写出顺序递推关系式:

$$f_k(v_k) = \min_{0\leqslant x_k\leqslant \sigma_k}[c_k(x_k) + h_k(v_k) + f_{k-1}(v_{k-1})] \quad k = 1,\cdots,n$$

其中,$\boldsymbol{\sigma}_k = \min(v_k + d_k, m)$。

利用上面的递推关系式,对每个 $k$,计算出 $f_k(v_k)$ 中的 $v_k$ 在 $0 \sim \min[\sum_{j=k+1}^{n} d_j, m - d_k]$ 之间的值,最后求得的 $f_n(0)$ 即为所求的最小总费用。

前述有关“生产与存储问题”,目前公开发表的文献中,在运用动态规划顺序递推法求解模型时涉及的两个变量 $v_k$ 和 $x_k$ 的取值范围:$0 \leqslant v_k \leqslant \min[\sum_{j=k+1}^{n} d_j, m - d_k]$,$0 \leqslant x_k \leqslant \boldsymbol{\sigma}_k$,$\boldsymbol{\sigma}_k = \min(v_k + d_k, m)$ 都出现了错误,这将导致最优解的丢失。在对“生产与存储问题”最优化模型的众多变量进行分析基础之上,推导出在动态规划顺序递推过程中 $x_k$ 和 $v_k$ 的取值范围,并举例说明其作用。

## 2 正确取值范围的推导

首先解决有关 $v_k$ 的取值范围:

(1) 若令 $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_k = d_k$,则 $v_k = 0$;由此可知 $v_k$ 可以等于 0,因此 $v_k \geqslant 0$;

(2) 其次,如果从第 1 阶段至第 $k$ 阶段,每个阶段的生产量都等于 $m$,则 $v_k$ 有最大值为 $\sum_{j=1}^{k}(m - d_j)$,所以 $v_k \leqslant \sum_{j=1}^{k}(m - d_j)$;

(3) 另外,若 $v_k > \sum_{j=k+1}^{n} d_j$,则第 $n$ 阶段结束时的库存量 $v_n$ 必然大于 0,这与题意违背(题意是 $v_n = 0$),所以,$v_k \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} d_j$。

综合以上三点,得到了关于 $v_k$ 的不等式:

$$0 \leqslant v_k \leqslant \min[\sum_{j=1}^{k}(m - d_j), \sum_{j=k+1}^{n} d_j] \quad k = 1,\cdots,n-1, v_n = 0 \tag{1}$$

$x_k$ 的范围是一个困难的问题。为此,首先必须解决 $x_k$ 的范围问题,完全是因为顺序递推的需要,或者说是为了求解 $f_k(v_k)$ 的需要。在具体求解 $f_k(v_k)$ 时,$v_k$ 是已知的。因此,$x_k$ 的范围应该而且必须在 $v_k$ 已经确定

的情况下来考虑,这是一个指导原则。只有认识这一点,才能解决 $x_k$ 的范围,而且只有抓住这一点,所得到的 $x_k$ 的范围才真正有用,才能指导顺序递推并保障其顺利进行。因为 $v_k = v_{k-1} + x_k - d_k$,所以有:

$$x_k = v_k - v_{k-1} + d_k \tag{2}$$

$x_k$ 的范围就是 $v_k - v_{k-1} + d_k$ 的范围。所以,由式(2)得:

$$\min(v_k - v_{k-1} + d_k) \leqslant x_k \leqslant \max(v_k - v_{k-1} + d_k) \tag{3}$$

因为 $v_k$ 已经确定,所以式(3)中 $v_k$ 和 $d_k$ 都是常量,但是 $v_{k-1}$ 却不是常量。

故式(3)转变:

$$v_k - \max\{v_{k-1}\} + d_k \leqslant x_k \leqslant v_k - \min\{v_{k-1}\} + d_k \tag{4}$$

在顺序递推中,在计算 $f_k(v_k)$ 时,因为 $v_k$ 已经明确,所以 $v_{k-1}$ 的范围也早已确定,因此,$\max\{v_{k-1}\}$ 是存在的,而且是已知的,而 $\min\{v_{k-1}\} = 0$。

所以式(4)转变:

$$v_k - \max\{v_{k-1}\} + d_k \leqslant x_k \leqslant v_k + d_k \tag{5}$$

另外,同时还要考虑到

$$0 \leqslant x_k \leqslant m \tag{6}$$

$m$ 为每个阶段生产量的上限。

综合式(5)和式(6)得:

$$\max\begin{bmatrix} v_k - \max\{v_{k-1}\} + d_k \\ 0 \end{bmatrix} \leqslant x_k \leqslant \min\begin{bmatrix} v_k + d_k \\ m \end{bmatrix} \tag{7}$$

式(7)就是关于 $x_k$ 在顺序递推情况下的取值范围。

## 3　实例验证

某工厂要对一种产品制定今后 3 个时期的生产计划,据估计,在今后 3 个时期内,市场对该产品的需求量如表 1 所示。

**表 1　产品的需求量**

| 时期($k$) | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 需求量($d_k$) | 4 | 5 | 3 |

假定该厂生产每批产品的固定成本为 3 千元,若不生产就为 0;每单位产品成本为 1 千元;每个时期生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位;每个时期末未售出的产品,每单位需付存储费用 0.5 千元。还假定在第一个时期的初始库存量为 0,第三个时期之末的库存量也为 0。试问该厂应如何安排各个时期的生产与库存,才能在满足市场需要的条件下,使总成本最小。

解　首先采用目前文献中给出的两个不等式,运用动态规划的顺序递推法求解。其符号含义与上面相同。

因为 $0 \leqslant v_k \leqslant \min[\sum_{j=k+1}^{n} d_j, m - d_k]$,$0 \leqslant x_k \leqslant \sigma_k$,$\sigma_k = \min(v_k + d_k, m)$;所以 $0 \leqslant v_1 \leqslant \min[d_2 + d_3, 6 - d_1]$,所以 $0 \leqslant v_1 \leqslant 2$,$0 \leqslant x_1 \leqslant \min(v_1 + d_1, 6)$。

当 $k = 1$ 时,因为第一时期需求量 $d_1 = 4$,而且初始库存量 $v_0 = 0$,为了满足第一时期的市场需求,所以第一时期的生产量 $x_1$ 最小为 4,此时 $v_1 = 0$;又因为每一个时期的最大生产批量 $m = 6$,故 $x_1$ 最大为 6,此时,$v_1 = 2$。$0 \leqslant v_1 \leqslant 2$ 是正确的,但这仅仅是 $k = 1$ 的特殊情况。$x_k$ 的不等式是错误的,因为 $x_1$ 不可能为 0。

$k=1$ 时,$f_1(0)=\min\limits_{x_1=4}[c_1(x_1)+h_1(v_1)]=\min[3+4+0.5\times 0]=7$,此时 $x_1=4$;$f_1(1)=\min\limits_{x_1=5}[c_1(x_1)+h_1(v_1)]=\min[3+5+0.5\times 1]=8.5$,此时 $x_1=5$;$f_1(2)=\min\limits_{x_1=6}[c_1(x_1)+h_1(v_1)]=\min[3+6+0.5\times 2]=10$,此时 $x_1=6$。当 $k=2$ 时,$0\leqslant v_2\leqslant \min[\sum\limits_{2+1}^{3}d_j, m-d_2]$,即 $0\leqslant v_2\leqslant \min[d_3, 6-d_2]=\min[3,6-5]=1$,故 $v_2=0,1$。

在 $v_2=0$ 时,按照文献中 $x_k$ 的不等式,$0\leqslant x_2\leqslant \min(v_2+d_2,6)$,故 $0\leqslant x_2\leqslant \min(0+5,6)$,所以最终得出 $0\leqslant x_2\leqslant 5$,这个不等式给出的 $x_2$ 的范围是错误的,因为 $x_2=0$,即第二时期安排生产量为 0,那么为了保证满足第一和第二时期的市场需求,第一时期的生产量 $x_1$ 应等于 9,而题意规定 $x_1$ 不可能超过 6,因此,$x_2=0$ 的安排是行不通的;在 $v_2=0$ 时,同样的道理 $x_2\neq 1$,$x_2\neq 2$。

为了保证运算的顺利进行,必须改变 $x_2$ 的取值范围。按照作者给出的关于 $x_k$ 的范围:

$$\max\begin{bmatrix} v_k-\max\{v_{k-1}\}+d_k \\ 0\end{bmatrix}\leqslant x_k\leqslant \min\begin{bmatrix} v_k+d_k \\ m\end{bmatrix}$$

故而

$$\max\begin{bmatrix} v_2-\max\{v_1\}+d_2 \\ 0\end{bmatrix}\leqslant x_2\leqslant \min\begin{bmatrix} v_2+d_2 \\ m\end{bmatrix}$$

当 $v_2=0$ 时,$\max\begin{bmatrix} 0-2+5 \\ 0\end{bmatrix}\leqslant x_2\leqslant \min\begin{bmatrix} 0+5 \\ 6\end{bmatrix}$, 故而 $3\leqslant x_2\leqslant 5$, 所以有:

$$f_2(0)=\min_{3\leqslant x_2\leqslant 5}[c_2(x_2)+h_2(v_2)+f_1(v_1)]=\min_{3\leqslant x_2\leqslant 5}\begin{bmatrix} c_2(3)+h_2(0)+f_1(2) \\ c_2(4)+h_2(0)+f_1(1) \\ c_2(5)+h_2(0)+f_1(0)\end{bmatrix}=$$

$$\min\begin{bmatrix} (3+3)+0+10 \\ (3+4)+0+8.5 \\ (3+5)+0+7\end{bmatrix}=15,\text{此时 } x_2=5, v_2=v_1+x_2-d_2。$$

当 $v_2=1$ 时,$x_2$ 的正确范围是 $4\leqslant x_2\leqslant 6$, 所有得到:

$$f_2(1)=\min_{4\leqslant x_2\leqslant 6}[c_2(x_2)+h_2(v_2)+f_1(v_1)]=\min_{4\leqslant x_2\leqslant 6}\begin{bmatrix} c_2(4)+h_2(1)+f_1(2) \\ c_2(5)+h_2(1)+f_1(1) \\ c_2(6)+h_2(1)+f_1(0)\end{bmatrix}=$$

$$\min\begin{bmatrix} 3+4+0.5\times 1+10 \\ 3+5+0.5\times 1+8.5 \\ 3+6+0.5\times 1+7\end{bmatrix}=16.5,\text{此时 } x_2=6。$$

当 $k=3$ 时,由题意知 $v_3=0$,按照文献给出的关于 $x_k$ 的不等式,$0\leqslant x_3\leqslant \min\begin{bmatrix} d_3+v_3 \\ 6\end{bmatrix}$,故 $0\leqslant x_3\leqslant 3$;但是,因为 $v_3=v_2+x_3-d_3$,在 $v_3=0$ 的情况下,若 $x_3=0$,因为 $d_3=3$,所以 $v_2=3$,可是 $v_2$ 的最大值前面已解出为 1,即 $v_2=3$ 不存在,所以 $x_3=0$ 不可能;同理,$x_3=1$ 也不可能。在 $v_3=0$ 的情况下,$x_3$ 的正确范围是 $2\leqslant x_3\leqslant 3$(按照作者给出的 $x_k$ 不等式可解出)。故而,

$$f_3(0)=\min_{2\leqslant x_3\leqslant 3}\begin{bmatrix} c_3(2)+h_3(0)+f_2(1) \\ c_3(3)+h_3(0)+f_2(0)\end{bmatrix}=\min\begin{bmatrix} 3+2+0+16.5 \\ 3+3+0+15\end{bmatrix}=21 \quad \text{此时 } x_3=3。$$

通过以上运算,根据文献[1-5]中关于 $v_k$ 的不等式,得到最小总成本是 21,最优策略是 $x_1=4$,$x_2=5$,

$x_3=3$。上述运算中,纠正了文献[1-5]中关于 $x_k$ 的不等式,以便运算能顺利进行。但由于使用了文献[1-5]中关于 $v_k$ 的不等式,所以,得到的结果仍然是错误的。

下面使用作者给出的关于 $x_k$ 和 $v_k$ 的两个不等式再解此题。

$k=1$ 时, 因为 $0 \leqslant v_k \leqslant \min[\sum_{j=1}^{k}(m-d_j),\sum_{j=k+1}^{n}d_j]$,故有 $0 \leqslant v_1 \leqslant 2$;

$v_1=0$ 时 $x_1=4$,$v_1=1$ 时 $x_1=5$,$v_1=2$ 时 $x_1=6$,所以 $f_1(0)=\min\limits_{x_1=4}[c_1(4)+h_1(0)]=7$,此时 $x_1=4$;$f_1(1)=\min\limits_{x_1=5}[c_1(5)+h_1(1)]=8.5$,此时 $x_1=5$;$f_1(2)=\min\limits_{x_1=6}[c_1(6)+h_1(2)]=10$,此时 $x_1=6$。

$k=2$ 时, $0 \leqslant v_2 \leqslant \min[\sum_{j=1}^{2}(m-d_j),\sum_{j=3}^{3}d_j]=min[(6-4)+(6-5),3]=3$。

$v_2=0$ 时,前文已计算出 $3 \leqslant x_2 \leqslant 5$, 得到:

$$f_2(0)=\min_{3\leqslant x_2\leqslant 5}[c_2(x_2)+h_2(v_2)+f_1(v_1)]=\min_{3\leqslant x_2\leqslant 5}\begin{bmatrix}c_2(3)+h_2(0)+f_1(2)\\c_2(4)+h_2(0)+f_1(1)\\c_2(5)+h_2(0)+f_1(0)\end{bmatrix}=$$

$$\min\begin{bmatrix}6+0+10\\7+0+8.5\\8+0+7\end{bmatrix}=15,\text{此时 } x_2=5。$$

$v_2=1$ 时,前文已计算出 $4 \leqslant x_2 \leqslant 6$, 所以有:

$$f_2(1)=\min_{4\leqslant x_2\leqslant 6}\begin{bmatrix}c_2(4)+h_2(1)+f_1(2)\\c_2(5)+h_2(1)+f_1(1)\\c_2(6)+h_2(1)+f_1(0)\end{bmatrix}=\min\begin{bmatrix}7+0.5+10\\8+0.5+8.5\\9+0.5+7\end{bmatrix}=16.5,\text{此时 } x_2=6。$$

$v_2=2$ 时,因为 $\max\begin{bmatrix}v_2-\max\{v_1\}+d_2\\0\end{bmatrix}\leqslant x_2\leqslant\min\begin{bmatrix}v_2+d_2\\m\end{bmatrix}$,所以 $\max\begin{bmatrix}2-2+5\\0\end{bmatrix}\leqslant x_2\leqslant\min\begin{bmatrix}2+5\\6\end{bmatrix}$,故而 $5\leqslant x_2\leqslant 6$。

所以 $f_2(2)=\min\limits_{5\leqslant x_2\leqslant 6}\begin{bmatrix}c_2(5)+h_2(2)+f_1(2)\\c_2(6)+h_2(2)+f_1(1)\end{bmatrix}=\min\begin{bmatrix}8+1+10\\9+1+8.5\end{bmatrix}=18.5$,此时 $x_2=6$。

$v_2=3$ 时,同理可求 $x_2=6$,所以 $f_2(3)=\min\limits_{x_2=6}[c_2(6)+h_2(3)+f_1(2)]=\min[9+1.5+10]=20.5$,此时 $x_2=6$。

$k=3$ 时,按照题意,$v_3=0$,此时,$\max\begin{bmatrix}v_3-\max\{v_2\}+d_3\\0\end{bmatrix}\leqslant x_3\leqslant\min\begin{bmatrix}v_3+d_3\\m\end{bmatrix}$,所以 $\max\begin{bmatrix}0-3+3\\0\end{bmatrix}\leqslant x_3\leqslant\min\begin{bmatrix}0+3\\6\end{bmatrix}$,故而 $0\leqslant x_3\leqslant 3$, 所以有:

$$f_3(0)=\min_{0\leqslant x_3\leqslant 3}\begin{bmatrix}c_3(0)+h_3(0)+f_2(3)\\c_3(1)+h_3(0)+f_2(2)\\c_3(2)+h_3(0)+f_2(1)\\c_3(3)+h_3(0)+f_2(0)\end{bmatrix}=\min\begin{bmatrix}0+0+20.5\\4+0+18.5\\5+0+16.5\\6+0+15\end{bmatrix}=20.5,\text{此时 } x_3=0。$$

由上面的计算过程及最后结果知,本题的最小总成本是 20.5,最优策略为 $x_1=6$,$x_2=6$,$x_3=0$。

## 4 结 语

在生产和经营管理中,经常遇到要合理地安排生产(或购买)与库存的问题,达到既要满足社会的需要,又要尽量降低成本费用。因此,正确制定生产(或采购)策略,确定不同时期的生产量(或采购量)和库存量,以使总的生产成本费用和库存费用之和最小,是所有企业所追求的目标。推导出的在动态规划顺序递推过程中 $x_k$ 和 $v_k$ 的取值范围,有助于决策者正确地进行决策。

**参考文献:**

[1] 胡运权,甘应爱,田丰. 运筹学[M]. 3版. 北京:清华大学出版社,2005

[2] 王周宏. 运筹学基础[M]. 北京:清华大学出版社、北京交通大学出版社,2011

[3] 韩中庚. 实用运筹学:模型、方法与计算[M]. 北京:清华大学出版社,2009

[4] 薛声家,左小德. 管理运筹学[M]. 2版. 广州:暨南大学出版社,2004

[5] 叶向. 实用运筹学. 中国人民大学出版社[M]. 2007

## Range of the Value of Two Variables and the Optimal Decision on "Production and Storage Model"

**RUI Shi-chun[1], WANG Yong-fu[2]**

(1. School of Management Science and Engineering, Anhui University of Finance and Economics, Anhui Bengbu 233030, China;

2. School of Engineering Science, University of Science and Technology of China, Hefei 233027, China)

**Abstract**: Example test demonstrates that, in the process of finding the optimal solution by using dynamic programming forward recursion method at present, the mistake about the range of the value of the production quantity $x_k$ at the k stage and the storage quantity $v_k$ at the end of k stage related to "production and storage model" is emerged, after studying the optimal model about "production and storage problem", according to the principle for the minimization of the sum of total production cost and total storage cost, the correct range of the value of $x_k$ and $v_k$ is derived.

**Key words**: production and storage problem; range of the value of production quantity; range of the value of storage quantity; dynamic programming; forward recursion

责任编辑:代小红