文章编号:1672 - 058X(2012)07 - 0028 - 05

浅谈线性方程组的迭代求解*

李焕荣
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:求解大型稀疏线性方程组的迭代法不仅是数值代数理论部分的主要内容,也是求解实际问题的重要方法. 针对 3 种典型的求解大型稀疏线性方程组的迭代法,即 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法,通过实际算例验证并分析了它们的计算速度和效率,为学习和使用迭代法求解线性方程组的学生及工程人员更好地理解和运用迭代法提供了参考和铺垫.

关键词: Jacobi 迭代法;Gauss-Seidel 迭代法;SOR 迭代法;线性方程组

中图分类号:O241.6 **文献标志码:**A

科学研究与生产实践中许多问题都可归结为线性方程组的求解,高效求解线性方程组成为许多科学与工程计算的核心. 解线性方程组的传统方法是利用高斯消元法或矩阵的三角分解法等直接求解[1],虽然传统方法具有理论上直接得到真解的优点,但当系数矩阵条件数很大时,存在严重的稳定性问题. 同时,当系数矩阵的非零元结构不规则或带宽较大时,其计算量与存储量也十分地大.

与直接法相比,迭代法只需存储原系数矩阵、对应于预处理的几个辅助矩阵和少量的几个向量,且迭代中除求解辅助线性方程组外,其余的计算主要是系数矩阵与向量的乘积,从而能充分利用系数矩阵的特性来减少计算量. 而且随着计算机技术的发展,计算机的存储量日益增大,计算速度也迅速提高,线性方程组的迭代求解在科学与工程计算中也起着越来越重要的作用[2,3].

同时,研究线性方程组的数值解法已成为数值代数的一个重要研究方向[4],迭代法能够充分利用矩阵的稀疏性,节省存储单元,而且它的构造和执行也相对较简单,因而迭代法是解大型稀疏线性代数方程组的比较实用的方法之一. 此处主要讨论 3 种常用的求解线性方程组的迭代法,即 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和逐次超松弛迭代法(SOR 迭代法).

1 迭代法

迭代法的基本思想是构造一串收敛到解的序列,即建立一种从已有近似解计算新的近似解的规则. 显然,由不同的计算规则可以得到不同的迭代法.

对线性代数方程组

收稿日期:2011 - 11 - 30;**修回日期:**2011 - 12 - 08.

* **基金项目:**国家自然科学基金(11101453);重庆市科委(2010BB9252)和重庆市教委(KJ110712)基金项目.

作者简介:李焕荣(1979-),女,山东泰安人,副教授,博士,从事偏微分方程数值解的研究.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

系数矩阵记为 A,右端常数项记为向量 b,则方程组(1)可写为矩阵形式:

$$Ax = b \tag{2}$$

下面简单介绍求解式(1)或式(2)的 3 种迭代方法[1].

1.1 Jacobi 迭代法

Jacobi 迭代法的计算公式为:

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}} \\ x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,\cdots \text{ 表示迭代次数} \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Gauss-Seidel 迭代法

Gauss-Seidel 迭代法的计算公式为:

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}} \\ x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,\cdots \text{ 表示迭代次数} \end{cases} \tag{4}$$

注 1:比较式(3)和(4)可知,Jacobi 迭代法不使用变量的最新信息计算 $x_i^{(k+1)}$,而 Gauss-Seidel 迭代计算 $x^{(k+1)}$ 的第 i 个分量 $x_i^{(k+1)}$ 时,利用了已经计算出的最新分量 $x_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,i-1)$,故 Gauss-Seidel 迭代法可看作 Jacobi 迭代法的一种改进,因此其计算效率也高于 Jacobi 迭代法.

1.3 SOR 迭代法

逐次松弛 SOR 迭代法的计算格式为:

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}} \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,\cdots \text{ 表示迭代次数} \\ \omega \text{ 为松弛因子} \end{cases} \tag{5}$$

当 $\omega=1$ 时,SOR 迭代法即为 Gauss-Seidel 迭代法;当 $2>\omega>1$ 时,称为超松弛迭代法;当 $\omega<1$ 时,称为低松弛迭代法.

注 2:松弛因子的选取对收敛速度影响极大,但目前尚无可供实用的计算最佳松弛因子的方法,常常是根据系数矩阵的性质及实际经验,通过试算来确定较佳的松弛因子.

2　算例求解

给出两个算例,分别根据迭代公式(3)(4)和(5)用 Matlab 编程[2,3],求出线性方程组的近似值,并对其作比较.

例 1　利用迭代法求解线性方程组 $AX=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1.00 & -0.65 & -0.55\\ -0.25 & 0.95 & -0.10\\ -0.25 & -0.05 & 1.00\end{pmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}50\ 000\\ 25\ 000\\ 0\end{bmatrix}$$

并当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-6}$时,迭代终止.

解 选取初始值 $X^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)'$,分别利用 Jacobi 迭代公式(3)和 Gauss-Seidel 迭代公式(4)编程计算,所得结果见表 1. 同时在图 1-图 3 中给出了两种迭代格式在求解过程中解分量 $x_i(i=1,2,3)$随迭代次数的变化.

表 1 两种迭代格式的求解结果

迭代方法	k(迭代次数)	X'(第 k 次迭代解)
Jacobi	47	(102 087.475 146 6,56 163.021 867 5,28 330.019 879 6)
Gauss-Seidel	26	(102 087.475 148 4,56 163.021 868 6,28 330.019 880 5)

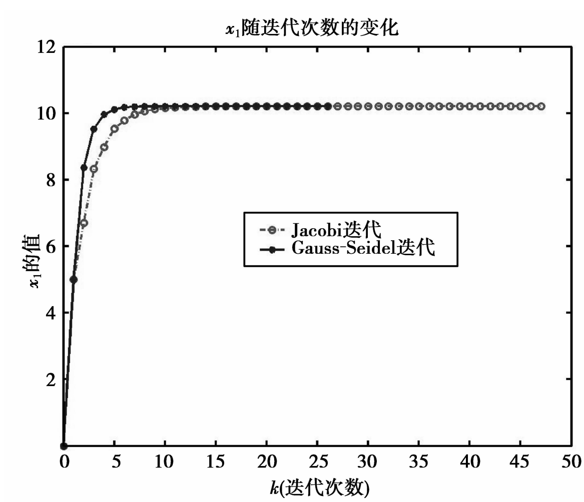

图 1 x_1 随迭代次数的变化

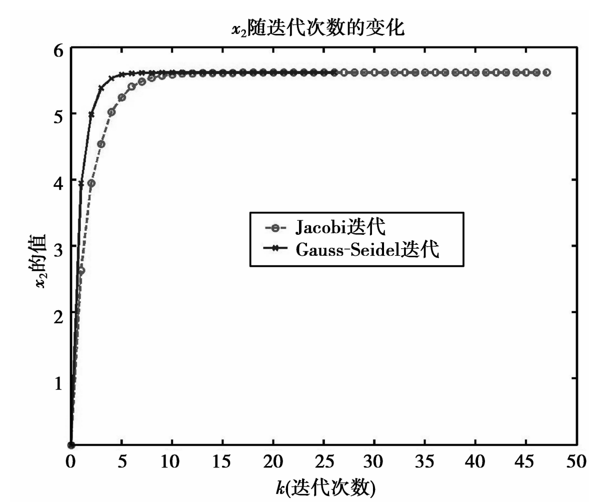

图 2 x_2 随迭代次数的变化

由表 1 可知,要达到给定的精度要求,Gauss-Seidel 迭代法的迭代次数比 Jacobi 迭代法要少. 同时由图 1-图 3 也可以看到,Gauss-Seidel 迭代法的收敛速度比 Jacobi 迭代法要快. 这也验证了注释 1 的说法,即 Jacobi 迭代法不使用变量的最新信息计算 $x_i^{(k+1)}$,而 Gauss-Seidel 迭代计算 $x^{(k+1)}$ 的第 i 个分量 $x_i^{(k+1)}$ 时,已经利用了计算出的最新分量 $x_j^{(k+1)}$,故 Gauss-Seidel 迭代法是 Jacobi 迭代法的改进,其计算效率也高于 Jacobi 迭代法.

例 2 用 SOR 迭代法解下列线性方程组(分别取松弛因子 $\omega=0.95,1.00,1.03,1.10,1.15$):

$$\begin{cases}4x_1-x_2=1\\ -x_1+4x_2-x_3=4\\ -x_2+4x_3=-3\end{cases}$$

其精确解为 $x^*=(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})^{\mathrm T}$. 要求当 $\|x^*-x^{(k)}\|_\infty<5\times10^{-6}$时,迭代终止,并且对每一个 ω 值确定迭代次数.

解 选取初始值 $x^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm T}$,利用 SOR 迭代公式(5)编程计算,所求结果见表 2. 同时在图 4 中给出了 SOR 方法的迭代次数随松弛因子 ω 的变化.

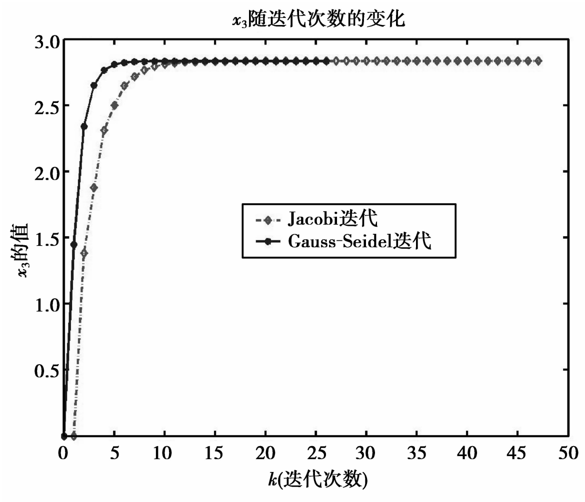

图 3　x_3 随迭代次数的变化

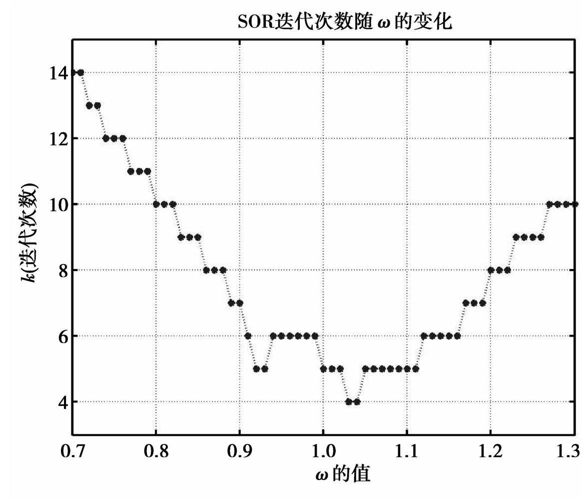

图 4　SOR 迭代次数随 ω 的变化

表 2　SOR 迭代求解结果

ω(松弛因子)	k(迭代次数)	x(第 k 次迭代解)
0.95	6	$(0.5000 \quad 1.0000 \quad -0.5000)^T$
1.00	5	$(0.5000 \quad 1.0000 \quad -0.5000)^T$
1.03	4	$(0.5000 \quad 1.0000 \quad -0.5000)^T$
1.10	5	$(0.5000 \quad 1.0000 \quad -0.5000)^T$
1.15	6	$(0.5000 \quad 1.0000 \quad -0.5000)^T$

由表 2 可知,要满足给定的精度要求,$\omega = 1.03$ 时的迭代次数与其他几个相比较是最少的. 同时由图 4 可以看出,当 ω 在区间[0.7,1.3]上取值时,对应的迭代次数先是逐渐减少,后又逐渐增大,但在 $\omega = 1.00$(此时 SOR 迭代即为 Gauss-Seidel 迭代)附近发生些许震荡,且 ω 在区间[1.03,1.04]上时 SOR 方法迭代次数最低,即在该区间上可取得最佳松弛因子.

3　小　结

简单介绍了求解线性方程组的迭代法的提出和 3 种常用的迭代方法,重点通过两个算例编程计算达到满足要求的解时所用迭代的次数,比较了 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代,以及不同松弛因子对 SOR 迭代的影响. 从求解线性方程组的实际算例结果分析可以看到,Gauss-Seidel 迭代要比 Jacobi 迭代计算速度快,计算效率高;而在 SOR 迭代中可以通过试算找到相对较佳的松弛因子.

参考文献:

[1] 李庆杨,王能超,易大义. 数值分析[M].5 版. 北京:清华大学出版社,2008

[2] 姜启源,邢文训,谢金星,等. 大学数学实验[M]. 北京:清华大学出版社,2005

[3] 朱衡君,肖燕彩,邱成. Matlab 语言及实践教程[M]. 北京:清华大学出版社,2005

[4] 李焕荣. 信息与计算科学专业开放性实践教学改革初探[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(3):310-312

Discussion on Iteration Solution to the System of Linear Equation

LI Huan-rong

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The iteration solution to big sparse system of linear equations is not only the main contents of numerical algebra theory but also an important solution to practical problems. According to three typical iteration solutions to big sparse system of linear equations such as Jacobi iteration, Gauss-Seidel iteration and SOR iteration, their calculation speed and efficiency are analyzed through practical examples, which provide reference and basis for students and engineers who learn and use iteration solution to linear equation system to better understand and apply iteration solutions.

Key words: Jacobi iteration; Gauss-Seidel iteration; SOR iteration; linear equation system

责任编辑:李翠薇

(上接第 15 页)

参考文献:

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982

[2] HAYMAN W K. Meromorphic function[M]. Claredon Press, Oxford, 1964

[3] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995

[4] BHOOSNURMATH S S, DYAVANAL R S. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007(53): 1191-1205

[5] DYAVANAL R S. Uniqueness and value-sharing of differential polynomials of meromorphic functions[J]. Math Anal Appl, 2010 (372): 335-345

[6] FRANK G. Eine Vermutung von Hayman uber Nullstellen meromorphic function[J]. Math Z, 1976(149): 29-36

Uniqueness of Meromorphic Functions Related to Shared Value

GONG Jun-ying

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Using Nevanlinna ' s value distribution theory, this paper studied the uniqueness theorem of meromorphic functions concerning differential polynomials that shared only one value . Two functions shared 1 CM with the multiplicities of zero and pole of two functions. This paper improved the result of reference and got new result. Some results about the uniqueness of meromorphic functions were improved and generalized.

Key words: uniqueness; meromorphic function; share values; differential polynomials

责任编辑:李翠薇